الفيزياء الحاسوبية



الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعــة تشــرين

كليـة العلوم

الفيزياء الحاسوبية

د. بسام محمد غزولين

مدرس في قسم الفيزياء

د. أمير درويش تفيحة

مدرس في قسم الفيزياء

القسم: الفيزياء

السنة: الثالثة

1435-1434 هـ

2013 – 2014 م

المحتوى

مقدمة الكتاب

يهدف هذا المقرر لحوسبة الفيزياء، بعد تطور علم الحواسيب، أدى إلى ازدياد أهمية معرفة طرق حل المسائل الفيزيائية باستخدام الحواسيب، مع تطور علم الفيزياء الحاسوبية، بشكل مطرد والتقدم الهائل في علم الحواسيب، ومع تقدم صناعتها وازدياد انتشارها. كما أدى هذا التطور إلى صياغة طرائق جديدة في حل مسائل فيزيائية معينة مثل: بنية المواد، والميكانيك الكمي عبر طرائق متعددة. مثل طرائق مونتي كارلو والتحريك الجزيئي.

تطبق طرائق الفيزياء الحاسوبية في العديد من مجالات العلم، من النمذجة إلى الانشطار النووي والليزر وفي أغلب التطبيقات الفيزيائية الحديثة. وتغطي مجالات الفيزياء من الفيزياء النظرية حتى الفيزياء التجريبية. تبرز الفيزياء الحاسوبية، بشكل خاص، في مسائل الجمل المعقدة متعددة الأجسام، ومسائل الميكانيك الكمومي حيث تبرز مشاكل الحصول على حلول دقيقة. يجمع هذا المقرر بين الفيزياء وعلم البرمجة والتحليل العددي، لتأمين حلول علمية مقبولة ومعتمدة للمسائل المعقدة.

سنتطرق في هذا الكتاب، بشكل سريع، إلى لغة البرمجة الفورتران، لما لها من أهمية لدى الفيزيائيين من حيث سهولة تطبيقها وفهمها، ومن حيث الإرث الضخم الذي تركه الفيزيائيون السابقون من حلول لمسائل عملوا عليها لعقود.

يأتي هذا الكتاب حصيلة جهد بذله المؤلفان، خلال تدريس هذا المقرر لأكثر من خمس سنوات لطلاب السنة الثالثة فيزياء في كلية العلوم بجامعة تشرين، إذ يكون الطالب قد أنهى دراسة المقررات الأساسية في الفيزياء، بما يمكنه من استيعاب مفردات هذا المقرر. لقد حرصنا على اغناء كتابنا، قدر الإمكان، بالأمثلة والتطبيقات في مختلف مجالات الفيزياء، وقمنا بكتابته كما كان الأمر في تدريسه، حيث قام د.بسام بكتابة الفصول: الأول والثاني والثالث و كتب د.أمير ما تبقى من الفصول وهي الرابع والخامس والسادس.

المفردات العامة لمقرر الفيزياء الحاسوبية
لطلاب السنة الثالثة فيزياء في قسم الفيزياء
من كلية العلوم بجامعة تشرين

الفصل الأول: مقدمة عامة عن الحاسوب والتنظيم العام للحاسوب النموذجي

الفصل الثاني: البرمجة على الحاسوب

الفصل الثالث: التكامل العددي ودراسة نموذج مونت كارلو

الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية العادية "للقوانين الفيزيائية"

الفصل الخامس: المعادلات التفاضلية الجزئية للقوانين الفيزيائية

الفصل السادس: تحويل فورييه "للقوانين الفيزيائية"

الفصل الأول

مقدمة عامة عن الحاسوب

والتنظيم العام للحاسوب النموذجي

1ـ مقدمة:

عرف الحاسوب بأنه جهاز لمعالجة البيانات أو المعلومات بعمليات حسابية ومنطقية بصفة آلية، ومن دون تدخل بشري أثناء التشغيل، وعادةً ما يعمل بالترقيم الثنائي. كما يعرف الحاسوب أنه عبارة عن جهاز إلكتروني، يقوم باستقبال البيانات، ومن ثم معالجتها، ثم تخزينها أو إظهارها للمستخدم بصورة أخرى .إذا أراد، بالطبع، أن يقوم بتلك الوظائف: ولابد من أجهزة خاصة تساعده على فعل ذلك، فهناك أجهزة خاصة للإدخال، أخرى للمعالجة وثالثة للتخزين .أي أن الحاسوب يقوم، ليس فقط باستقبال البيانات، ومن ثم معالجتها حسب رغبتنا وإخراج نتائج عملية المعالجة وتخزينها بل يمكنه أيضاً نقلها إلى جهاز حاسب آخر.

2ـ تصنيف الحاسبات:

تعرف أكثر أجهزة الحاسوب استخداماً في المنازل والمكاتب باسم الحاسوب الشخصي Personal Computer (PC). إلا أنه ليس جميع أجهزة الحاسوب التي يستخدمها الناس هي أجهزة حاسوب شخصية، نحن نستخدم أنواعاً مختلفة من أجهزة الحاسوب لأداء مهام متنوعة، ومن المهم أن نفهم الفروق بين أنواع الحواسيب، لاختيار التقنية المناسبة لأداء وانجاز مهمة معينة.

أولاً) حسب الغرض من الاستخدام:

1– حاسبات الأغراض العامة:

يستخدم هذا النوع للأغراض العامة، سواءً العلمية أو التجارية أو الإدارية، ومنها أنظمة البنوك والمصارف وحسابات الرواتب والميزانيات. كما يستعمل في حل المعادلات الرياضية والتصاميم الهندسية، ويمكن القول إنه لا يمكن حصر استعمالات واستخدامات هذا النوع من الحاسبات لأنه يمتلك المرونة الكاملة لاستعماله في أي مكان.

2- حاسبات الأغراض الخاصة:

هذا النوع من الحواسيب يستخدم لغرض واحد فقط صمم من أجله، وهو التحكم في العملات، أو أجهزة الإنذار المبكر، أو التحكم في المركبات الفضائية أو الأجهزة الطبية وغيرها.

ثانياً) حسب نوع البيانات التي يعالجها :

1) الحاسبات التناظرية:

يعالج هذا النوع من الحاسبات البيانات التي تتغير باستمرار، مثل درجات الحرارة و الضغط الجوي، كما يستخدم هذا النوع لحل المشكلات العلمية و الهندسية، و في تصميم نماذج الطائرات والصواريخ و المركبات الفضائية.

2) الحاسبات الرقمية:

هذا النوع من الحاسبات يستعمل المعلومات المتقطعة والمتغيرات الممثلة بواسطة الأعداد، ويعتبر ملائماً للاستعمالات التجارية والعلمية، وهو من أكثر الحاسبات مرونة في تنفيذ العمليات.

3) الحاسبات الهجينة:

هي مزيج بين النوعين الرقمي والتناظري، تحتوي على مداخل ومخارج تناظرية والمعالجة فيه تكون رقمية، وهذا النوع من الحاسبات يجمع أفضل الإمكانيات من كلا النوعين السابقين، فهو يأخذ القدرة على خزن البيانات والدقة العالية من الحاسبات الرقمية، ويأخذ من الحاسبات الرقمية ردة الفعل السريعة لتغيير المدخلات ونظام الوقت الحقيقي.

ثالثاً) حسب الحجم والأداء:

1) الحاسبات الدقيقة:

وهي أصغر أنواع الحاسبات ذات الأغراض العامة، و يستخدم في الأغراض الإدارية و العلمية و تعتمد على المعالج الدقيق (Microprocessor)، أطلق على هذا النوع مصطلح الحاسب الشخصي (PC).

2) الحاسبات الصغيرة:

ظهر هذا النوع في مطلع الستينيات من القرن الماضي، وإستعمل في البداية بوصفها أجهزة متخصصة لأغراض معينة، ومع مرور الوقت أصبحت هذه الحاسبات تمتلك المرونة التي أوصلتها للاستخدامات العامة ومنها الإدارية والتجارية والعلمية بالإضافة إلى استعمالها في الأغراض الخاصة، مثل التحكم في العمليات الصناعية وتوجيه المركبات وأجهزة الإنذار وغيرها من الاستخدامات.

3) الحاسبات الرئيسية:

هذا النوع من الحاسبات تكاليفها عالية، وتمتلك إمكانيات كبيرة، وتستعملها معظم الشركات الكبيرة ويمكن استخدامها بوصفها حاسبات مركزية ضمن شركة حاسبات صغيرة.

4) الحاسبات الفائقة:

ما يميز هذا النوع من الحاسبات هو أنها كبيرة الحجم، وتكاليفها عالية، وذات سرعات فائقة، وتمتلك مقدرة حسابية فائقة. من الأمثلة على هذا النوع من الحاسبات (SYBER) الذي أنتجته شركة (CDC) وإستعملته وزارة الدفاع الأمريكية في مجال الأسلحة الاستراتيجية، والحسابات المعقدة للحكومة الفيدرالية.

ماذا تعني " البيانات - المعالجة - الإخراج - التخزين " ؟

البيانات : هي أية معلومات مكتوبة بطريقة تمكّن الحاسب من التعامل معها، فالمعلومات التي لا يستطيع الحاسب التعامل معها لا تعتبر بيانات بالنسبة إلى الحاسب.

المعالجة : هي عملية تحويل البيانات من شكل إلى آخر .

إخراج البيانات : هي عملية إظهار أو استرجاع البيانات إلى شكل يتمكن مستخدم الحاسب من فهمها .

التخزين : هي عملية الاحتفاظ بالبيانات لاسترجاعها لاحقاً –ويسمى الذاكرة.

الشبكات : هي مجموعة من الحاسبات(قد يكون عددها قليلاً أو كثيراً، ويمكن أن تتكون الشبكة من حاسبين إثنين فقط، أو قد تمتد إلى أن تتضمن الملايين من الحاسبات) مرتبطة مع بعضها لتتمكن من تبادل البيانات.

أنواع البيانات

يتعامل الحاسب مع أنواع عديدة من البيانات، مثل النصوص والصور والرسومات والفيديو ، الصوت.

كما إن الحاسب يتعامل مع أنواع بيانات مختلطة من الأنواع السابقة مثل قواعد البيانات (هي عبارة عن مجموعة من البيانات الخاصة بعدد كبير من الأشياء، يتم حفظها في الحاسب بصورة تمكننا من استرجاعها بسرعة كبيرة وقت الحاجة إليها مثل المعلومات الخاصة بالموظفين في الشركة، أو البضائع في محل تجاري) التي قد تحتوي نصوصاً وصوراً، تحوي في بعض الأحيان فيديو وصوتاً أيضاً، ويستطيع الحاسب أيضاً التحويل بين العديد من صور البيانات، مثل تحويل النصوص إلى صوت.

3- النظام الرقمي:

إذا أردنا نقل بيانات من مكان إلى آخر، بغض النظر عن المسافة بينهما فلا بدَّ من:

أولاً : يجب أن يتم تحويل هذه البيانات إلى إشارات قابلة للنقل .

ثانياً : تنقل هذه البيانات إلى الطرف الآخر، على شكل إشارات إلكترونية .

ثالثاً : يقوم الطرف الآخر بتحويل هذه الإشارات إلى بيانات مرة أخرى .

يمكن ان تتم عملية نقل البيانات بإحدى طريقتين:

الطريقة الرقمية: وفيها ترسل المعلومات من طرف إلى آخر على شكل سلسلة من الإشارات، كل إشارة قيمتها 1 أو صفر، مثلاً قد تكون سلسلة الإشارات على الشكل التالي: 0011011010101110010000010110

الطريقة التماثلية: يسمح أن تكون الإشارة كاملة القيمة، أو تساوي صفراً أو أية قيمة بين هذه وتلك.

ولا بدَّ من أن تستعمل إحدى الطريقتين إذا ما أردنا نقل أية بيانات من مكان إلى آخر، وينطبق هذا الكلام على جميع عمليات نقل البيانات مهما كان هدفها، أو المسافة بين الطرفين المتراسلين، وهذه بعض الأمثلة:

- نقل البيانات من التلفاز إلى الفيديو (للتسجيل) وهذا النقل هو من النوع التماثلي.
- نقل البيانات (أياً كان نوعها) بين جهازي مودم، وهذا النوع هو تماثلي أيضاً.

نقل البيانات من وحدة المعالجة المركزية إلى الذاكرة العشوائية (وهذا النوع رقمي).

ما الفرق بين النظام الرقمي و التماثلي؟

النظام التماثلي يمكننا من إرسال كمية من المعلومات أكثر وبسهولة أكثر، ولكنَّ الإشارة الكهربائية التي تمر في هذه الإلكترونيات معرضة للتشويش من المجالات المغنطيسية الموجودة في البيئة المحيطة، مما يزيد كثيراً من احتمال حدوث أخطاء، وهذه هي أهم مساوئ النظام التماثلي، من الممكن مثلاً، أن يرسل أحد المكونات إلى الآخر إشارة قيمتها نصفُ ولكن، بسبب التشويشُ ربما تصل الإشارة 0.7.

ولكن في النظام الرقمي إذا حصل خطأ في إرسال الرسالة، فإنَّ الحاسب ينتبه فوراً الى الخطأ ويصححه. إذا أرسل، مثلاً أحد المكونات إشارة قيمتها واحد، وحدث بعض التشويش الذي جعل الإشارة 0.7، فإن المكوَّن الآخر سوف يفهم فوراً أن الإشارة أصلها 1 صحيح ويعتبرها كذلك، وهكذا.

لذلك كل من النظام الرقمي والتماثلي له حسناته وعيوبه، ويعتمد استخدام كل منهما وفق الظروف، وجهاز الحاسب هو جهاز رقمي في 99 بالمائة من أجزائه. ولتوضيح الفكرة نأخذ نوعاً من البيانات ولتكن النصوص لنرى كيف يحول الحاسب النصوص إلى إشارات رقمية ليتمكن من معالجتها وتخزينها ......

يتعامل الحاسب مع النصوص على أنها حروف، ويتبع الحاسب القواعد التالية :

- كل حرف من هذه الحروف يمثل في الحاسب بثماني نبضات كهربائية،
- المسافات الفاصلة بين الحروف تعتبر حروفاً، وتمثل أيضاً بثماني نبضات،

وتسمى كل نبضة من هذه النبضات "بت" = bit وجمعها "بتات"= bits، و لنأخذ مثالاً على ذلك النصوص، وهي نوع من أنواع البيانات التي ذكرناها، والحاسب يتعامل مع النصوص على أساس أنَّ كل حرف أو فراغ يساوي بايت (byte)، و كل بايت مكون من 8 بتات، كيف يستطيع الحاسب نقل النصوص بين أجزائه؟

لنضرب مثالاً على ذلك جملة " أنا أحب الحاسب "، يحول الحاسب هذه الكلمات إلى سلسلة من 112 نبضة (عدد الحروف 14 حرفاً × 8 نبضات لكل حرف = 112)، ويتعامل مع هذه النبضات بصورة رقمية كما ذكرنا سابقاً.

لماذا يقسم الحاسب الحروف إلى بتات؟ لماذا لا يتعامل معها على أنها حروف من دون تقسيمها؟

هذا لأن الحاسب لا يستطيع أن يتعامل مع أي شيء إلا إذا كان على الصورة الرقمية،

ولا سبيل لتحويل الحروف إلى الصورة الرقمية إلا بتحويلها إلى بتات، وإذا أردنا من الحاسب التعامل مع البيانات –أي نوع من البيانات –لابدَّ أن نقدمها له بصورة واحدات وأصفار (صورة رقمية) .

4ـ مكونات الحاسوب: يتكون الحاسوب من وحدات إدخال وإخراج، واتصال ووحدات معالجة مركزية والحساب و المنطق :

وحدات الإدخال : يتم من خلالها إدخال الأوامر إلى الكمبيوتر، وتزويده من خلالها بالمعلومات، مثل: لوحة المفاتيح، الفأرة، الماسح الضوئي، والمكروفون، الكاميرا، القلم الضوئي .

وحدات الإخراج :

وهي الوحدات التي يتم من خلالها إخراج النتائج من الحاسوب إلى المستخدم مثل :الشاشة، الطابعة،السماعات .

وحدات الإتصال :

مثل: بطاقة الشبكة، المودام، الذي يقوم بتحويل الإشارات التناظرية لإشارة رقمية .

وحدة المعالجة المركزية :

وهي أهم وحدات الكمبيوتر التي تعدّ العقل المفكر الذي يتحكم بمعالجة البيانات،مهمتها التحكم في مكونات الحاسوب، وتوجيه التعليمات إلى هذه المكونات لأداء مهمة معينة .

وحدتي الحساب و المنظق :

إن المعالج يقوم بعمل العمليات الحسابية أو العمليات المنطقية، ولكن يقوم بإرسالها إلىALU التي تقوم بالعملية الحسابية أو المنطقية (+ / < >) . وتعيد النتائج إلى المعالج ليستخدمها.

5ـ برامج الحاسوب : هي عبارة عن برامج الأنظمة التي تتحكم في مختلف العمليات التي يستخدمها الحاسوب، ليقوم بعمله على أكمل وجه، والتي يتم تحميلها تلقائياً عند بدء تشغيل جهاز الحاسوب .وبعض هذه البرمجيات تبنى داخل الحاسوب، وبعضها يخزن على الأقراص الممغنطة ويجب شراؤها بشكل منفصل. مثل Mac OS ماكنتوش، ويندوز و دوس.

6- تصميم المعالج المركزي (CPU):

المعالج المركزي (CPU) هو الأداة التي تقوم بجميع عمليات الحاسب، ويحتوي على أجهزة مؤلفة من الدارات والوحدات، تقوم جميعها بتنفيذ نوعين من العمليات:

a) معالجة المعطيات (Data Processing)، أي إجراء العمليات الجبرية والمنطقية، و جميع الأعمال المتعلقة بمعالجة المعطيات. يقوم بهذه الأعمال الوحدة (ALU) (Arithmetic logic Unit) ووحدة الحساب والمنطق.

b) التنظيم والتحكم بالعمليات، أي مراقبة جميع العمليات الدائرة في داخل المعالج المركزي ، وغالباً ما تتم عملية التنظيم والمراقبة هذه بمساعدة برامج خاصة تدعى أنظمة التشغيل (Operating system).

1.6- الاعتبارات المهمة لتصميم المعالج المركزي هي:

نوع التعليمات، وسلسلة التعليمات التي بإمكان المعالج المركزي تنفيذها، ووحدة تنفيذ هذه التعليمات. وبشكل عام فإن كل تعليمة أو كل عملية أو أمر يتم تنفيذه بواسطة ميكرو برنامج مكتوب بلغة الآلة (machine language) ومسجل في ذاكرة خاصة للقراءة فقط تدعى (ROM)، وموجودة في داخل المعالج المركزي وتحديداً داخل وحدة التحكم. عدد المراصف المستعملة في وحدة المعالجة المركزية. عدد المراصف المستعملة في تنظيم الوحدة المركزية CPU. الطريقة التي بواسطتها يتصل المعالج المركزي بالأجهزة المحيطة. ومن الناحية العملية وقبل البدء بمشروع تصميم المعالج المركزي يجب الانتباه إلى الأمور التالية:

- يجب أن يكون الحاسب قادراً على تنفيذ a من التعليمات في b من الثانية.
- يجب أن يكون الحاسب قادراً على استيعاب أجهزة الإدخال والإخراج.
- يجب أن يتوافق الحاسب مع البرامج وأنظمة التشغيل.
- أن يكون ثمن العتاد اقتصادياً ومعقولاً.

ولتحقيق هذه المتطلبات لتنظيم المعالج المركزي بإمكاننا:

- زيادة عدد المراصف القابلة للعنونة بواسطة البرامج.
- قابلية وحدة المعالجة ALU : من توسيع الامكانات الجبرية، وزيادة سرعة تنفيذ العمليات باستعمال دارات توافقية.
- زيادة عدد المراصف المستعملة من قبل التعليمات.
- إضافة وحدات تحكم جديدة لتسهيل التبادل المؤقت للمعطيات.
- ذاكرة ثانوية سريعة
- يجب أن يحتوي المعالج المركزي على قنوات عديدة تؤمن له الاتصال بالأجهزة الخارجية.

7 ـ تاريخ تطور الحاسب الآلي :

تطور الحساب عند الإنسان القديم من استخدام أصابع اليد والحصى، إلى تصميم بعض الأدوات الخشبية للقيام بعملياته.

تم تصميم أول حاسبة ميكانيكية على يد العالم باسكال في عام 1642 م لأداء عمليات الجمع والطرح .



الشكل(1) أول حاسبة ميكانيكية صممها العالم باسكال

في عام 1694م أكمل العالم الرياضي ليبنتز آلة مبنية على مبدأ آلة باسكال لأداء عملية الضرب والقسمة والجذور، حيث يقوم المستخدم بتجهيزها لكل عملية حسابية.

اقتنع شارل باباج بفكرة مؤداها أن الحسابات الرياضية والمنطق، وحتى التحليل هي مسائل يمكن مكننتها، وفي 14 حزيران عام 1822م اقترح أمام أعضاء اللجنة الملكية الفلكية عرضاً لبناء حاسب ميكانيكي عملاق سمي آلة الفروقْ والتي لم يكتمل بناؤها بسبب العقبات المالية. وفي العام 1875 أصدر أحد المكاتب الأمريكية المتخصصة ببراءات الاختراع، براءة اختراع أول حاسب مكتبي. إلا أن ذلك الحاسب لم يعمل. وفي عام 1876 م قام مبتكر مجهول يدعى برنارت جرينت بعرض محرك تفاضلي ضخم بلغ وزنه طناً كاملاً.

تُم تصميم أول حاسب آلي رقمي عام 1939م وسمي انياك، على يد العالمين جون وايكرت، وتم تشغيله في عام 1946م بتوصيل أسلاك خارجية. وكان يحتوي على 19 ألف صمام، ويزن 30 طن ويحتل 1500 قدم مربع.

التطور الهائل هو أحد السمات الرئيسية في صناعة الحاسبات منذ إنتاج أول حاسب آلي شخصي وحتى الآن. أصبحت الحاسبات الجديدة أسرع بكثير من المعالجات الأولى، وقد صنع العديد من المعالجات عبر تلك السنين، وكان كل معالج يفوق سابقه سرعة، وكان –وما زال –قانون مور هو سيد الموقف (وينص قانون مور على أن عدد الترانزستورات في المعالجات سوف تتضاعف كل ثمانية عشر شهرا)، وكانت المعالجات تصدر بتحسينات رئيسية بين الحين والآخر، مما أصطلح على تسميتها بأجيال المعالجات.

أصدرت شركة إنتل في عام 1970 أول معالج لحاسب شخصي لنظام " IBM " هو " 8008 " ، وهو يعدّ الشريحة الأولى من معالجات الجيل الأول، ثم عمدت إلى تطويرها وأصدرت في العام 1974 الشريحة 8080، وكان لنجاح هذه

الشريحة الأثر البالغ في حثّ الشركات على تصنيع هذا المعالج، وفي العام 1978 أصدرت شركة انتل المعالج 8086 الذي استطاع أن يجمع بين التوافق مع المعالج 8080 والتقدم الكبير والإلهام في التصميم. وتوالت بعده المعالجات 80186 ثم "80286" ويعبر عنه اختصاراً ب "286"، والجيل الثالث "80386" أو "386" وهكذا، ويختلف كل جيل عن الجيل السابق له باختلافات كبيرة غالباً، وتأتي المعالجات الأحدث أسرع وأقل استهلاكاً للطاقة، وكذلك تدعم البرمجيات الجديدة.

يبرز الفرق بين معالج و معالج آخر فيما يلي :

يقوم المعالج السريع بالعمل ذاته لكن بشكل أسرع من المعالج البطيء. المعالج لا يحدد بمفرده أداء الحاسب ولكنه يحدد أقصى أداء يمكن أن يصل إليه. وعلى المكونات الأخرى في الحاسب أن تكون سريعة أيضاً لكي يكون الحاسب بكامله سري.

الاعتمادية : والمعالج المنخفض الجودة قد يجعل حاسبك غير مستقر. والمعالج السريع قد يشغل برنامجاً معيناً، بينما المعالج الأبطأ لا يتمكن من تشغيله. بعض المعالجات تستهلك الكثير من الطاقة مما يزيد من مشاكل الحرارة، ويؤثر على الأداء والاستقرار.

اختيار اللوحة الأم : يجب اختيار اللوحة الأم بحيث تدعم المعالج الذي تود تركيبه والعكس.

8 ـ بنية المعالجات:

تتألف المعالجات من عدد كبير جداً من الترانزستورات، يقوم مبدأ عمل المعالج على التعامل مع البيانات على شكل بتات وبايتات (راجع الموضوع "البت والبايت ومساحات التخزين")، فالمعالج لا يفهم إلا لغة البتات على شكل واحدات وأصفار. كل بت يعتبره شحنة، ويتعامل معه على أنه شحنة ينقلها ويخزنها.

إذا نظرنا نظرة متعمقة في داخل المعالج، و والعمل الذي يؤديه نجد أنه يقوم إما بالعمليات الحسابية كالجمع والطرح ...إلخ أو بالعمليات المنطقية كالمقارنة بين الأعداد. وفي الأحوال كلها على المعالج أن يتخذ – بمساعدة التعليمات – القرارات الصحيحة، ويقود دقة العمل على هذا الأساس، فكيف يتخذ الحاسب القرارات ؟

هذا هو عمل الترانزستورات، ولا تعتقد أن ترانزستوراً واحداً يستطيع أن يتخذ القرارت، بل إن هذه الترانزستورات موزعة على شكل مجموعات داخل المعالج، لتقوم كل مجموعة منها بنوعية معينة من الأعمال. فمثلاً، إحدى المجموعات مخصصة للمقارنة بين الأرقام و أخرى لاتخاذ القرارات في حالة معينة وهكذا، وفي كل مجموعة يختلف عدد الترانزستورات، وطريقة تجميعها مما يؤثر على وظيفتها، ويستطيع الحاسب باستخدام هذه المجموعات المختلفة بشكل مدروس ومنظم أن يقوم بكل العمل الذي يطلب منه .

إن كل "مجموعة" من هذه المجموعات تسمى "بوابة منطقية"، وتختلف البوابات المنطقية بحسب الوظيفة التي تؤديها، وعدد الترانزستورات التي تحتويها.

وتصنيع المعالج هو وضع هذه المجموعات وربطها ببعضها بالشكل المطلوب. إن "المجموعات" إذا تجمع عدد كبير منها لأداء وظيفة معينة تصبح ما يسمى IC (integrated circuits)(دارات متكاملة) والمعالج ما هو إلا مجموعة من الدارات المتكاملة مترابطة مع بعضها البعض بشكل معقد . وبكلمة أخرى فإن :

عدة ترانزستورات = مجموعة وظيفية (بوابة)

عدة مجموعات وظيفية (الآلاف منها) = "دارة متكاملة"

عدة "دارات متكاملة" = معالج

والترانزستور هو أصغر وحدة، وبتنظيم هذه الوحدة الصغيرة (الترانزستور) يمكننا تجميعها لتكوين وحدات ذات وظيفة معينة، تختلف باختلاف ترتيب وتنسيق هذه الترانزستورات داخلها، وبذلك يمكننا تكوين أنواع لا نهائية من الوحدات (المجموعات أو الدارات المتكاملة)، وكلما زاد عدد الترانزستورات التي تتكون منها الدارات المتكاملة، كلما كان بإمكانها تأدية وظائف أكثر تعقيداً .

هناك فرق مهم جداً بين المعالج، وبين الدارات المتكاملة، والمعالج قابل للبرمجة ويمكنه تأدية أية وظيفة تطلب منه، بينما الدارات المتكاملة لا يمكنها ذلك، بل تكون مخصصة لأداء عمل معين في جهاز معين. يقسم المعالج أي عمل يقوم به إلى أقسام صغيرة تسمى التعليمات، ويعتمد المعالج على البرنامج ليقول له متى وكيف ينفذ كل تعليمه حتى ينجز العمل المطلوب، بينما الدارات المتكاملة لا تتطلب برنامجاً ولكن تركيبتها تؤدي العمل المطلوب منها.

9 ـ معمارية المعالج:

يوجد داخل المعالج ملايين الترانزستورات التي تمكّن من القيام بعمل المعالج، ولا يخفى، أن هذه الملايين من الترانزستورات موضوعة كلها في مساحة صغيرة جداً، أي أنها محشورة، وبين الواحدة والأخرى مساحة قليلة (الترانزستورات لا ترى بالعين المجردة) وهذه الوحدات موصولة مع بعضها البعض، وكلما كانت معمارية المعالج أصغر، كلما كان استهلاك الطاقة أقل، و كانت الحرارة الناتجة من المعالج أقل مما يخفف من مشاكل التبريد، وكذلك يمكن المعمارية الأصغر من استخدام فولتية أقل للتيار المار في هذه الأسلاك .

والمايكرون هو وحدة قياس الطول تساوي واحد من المليون من المتر، إن المعالج بنتيوم من رتبة 0.5 ميكرون بينما المعالج MMX بنتيوم معماريته 0.35 ميكرون و المعالج بنتيوم الثاني يستعمل معمارية 0.25 ميكرون .

وقد نجحت شركة IBM، بفضل نوع من التقنيات الجديدة، بتطوير طريقة لصنع معالجات بمعمارية 0.13، ميكرون وهذا قد يفتح الباب لمعماريات أصغر. فكلما صغرت المعمارية كلما تمكنا من وضع عدد أكبر من الترانزستورات في مساحة أقل مما يمكننا من تصنيع معالجات أقوى بتكلفة منخفضة .

لم تكن شركة واحدة بعينها محتكرة لصناعة المعالجات، بل تنافست عدة شركات في ذلك، ولكن شركة إنتل تبقى الرائدة في هذا المجال، وكانت معالجاتها دائماً هي القمة، وتتنافس بقية الشركات على تقليدها، وربما يكون هذا الحال قد تغير في الآونة الأخيرة بتفوق شركة AMD بإصدارها معالجها "أثلون" حيث تفوقت على إنتل بالأداء. وينتج هؤلاء المصنعون معالجات متوافقة مع إنتل .

10 ـ مبادئ هيكلة فون نيومان:

قدم فون نيومان القواعد الأساسية التي نستعملها في تصميم الحواسيب والمجملة في أربع نقاط:

- من تخزين البيانات والتعليمات في الذاكرة الرئيسية (تخزين مفهوم البرنامج) .
- محتوى الذاكرة عبارة عن عنونة تتم بواسطة الموقع من دون النظر لما هو مخزن في هذا الموقع.
- يتم تنفيذ التعليمات بشكل تسلسلي من التعليمة الأولى إلى التالية بشكل منظم .
- هيكلية الحاسوب: وحدة المعالجة المركزية " CPU " وتحتوي على

ALU وحدة التحكم "والتي تنسق عملية تنفيذ التعليمات و" CPU " وحدة الحساب والمنطق " التي تجري العمليات الحسابية و المنطقية.

10 .1 ـ هيكلية فون نيومان متعددة الأغراض:

إن الحواسيب الالكترونية المستخدمة حاليا هي حواسيب فون نيومان المتعددة الأغراض، والتي تؤدي برامج مختلفة حسب البرنامج المنفذ لها.

تتمثل المهمة الرئيسية في تنفيذ التعليمات الآتية إليه من الذاكرة الرئيسية CPU .

- يتم إخبار CPU عن وجوب أداء واحدة من العمليات الأساسية) قد تكون حسابية أو منطقية (وذلك لنقل البيانات من وإلى الذاكرة الرئيسية).
- وحدة التحكم (CU) هي التي تقوم بتفسير/ ترجمة التعليمة الآتية إليها من الذاكرة الرئيسية وهي تقوم أيضاً بإخبارالعناصر الأخرى عما يجب القيام به.

- تتضمن وحدة(CPU) المجموعة التي تعتبر عادة أجهزة تخزين مؤقت للبيانات .

10 .2 . المكونات الرئيسية للمعالج

يتكون المعالج من الأجزاء الرئيسية التالية:

1. وحدة الإدخال والإخراج،
2. وحدة التحكم،
3. وحدة الحساب والمنطق : وتتقسم لـ a– وحدة الفاصلة العائمة و b– وحدة الأعداد الصحيحة c– المسجلات d–الذاكرة المخبئية.

1– وحدة الإدخال والإخراج:

تتحكم وحدة الإدخال والإخراج بتسيير المعلومات من وإلى المعالج، وهي الجزء الذي يقوم بطلب البيانات، والتنسيق مع الذاكرة العشوائية في تسيير البيانات، وتحتوي على الذاكرة المخبئية من المستوى الأول (L1) .

2– وحدة التحكم:

تتحكم بسير البيانات داخل المعالج وتنسق بين مختلف أجزائه المعالج للقيام بالمهمة المطلوبة. تتحكم هذه الوحدة بتردد المعالج، فإذا كان لديك معالج تردده 700 ميجاهيرتز، مثلاً، فإن هذا معناه أن وحدة التحكم فيه تعمل على تردد 700 ميجاهيرتز .

3 – وحدة الحساب والمنطق

A.3– وحدة الفاصلة العائمة :

وحدة الفاصلة العائمة هي وحدة موجودة داخل المعالج، ومتخصصة في العمليات الحسابية الخاصة بالفاصلة العائمة .وتلعب هذه الوحدة دوراً رئيساً في سرعة تشغيل البرامج التي تعتمد بشكل كبير على الأعداد العشرية، وهي في الغالب الألعاب الثلاثية الأبعاد وبرامج الرسم الهندسي.

توجد وحدة الفاصلة العائمة في المعالجات 486 وفي المعالجات الأكثر حداثة منها (ما عدا المعالج SX486)، وقد كانت توضع في المعالجات 386 وما قبله خارج المعالج، إن وضع وحدة الفاصلة العائمة خارج المعالج (على اللوحة الأم) يجعلها أبطأ، جميع المعالجات اليوم تحتوي على وحدة فاصلة عائمة.

b.3 –وحدة الأعداد الصحيحة

تختص هذه الوحدة بالقيام بحسابات الأعداد الصحيحة، وتستعمل الأرقام الصحيحة في التطبيقات الثنائية الأبعاد كوورد وإكسل، وبرامج الرسم الثنائية الأبعاد كما تستعمل في معالجة النصوص

c.3– المسجلات(registers)

المسجلات هي عبارة عن نوع من الذاكرة السريعة جداً، تستعمل لتخزين الأرقام التي سيجري المعالج عليها حساباته. لا يمكن للمعالج إجراء أي عملية حسابية إلا بعد أن يجلب الأرقام المراد إجراء العمليات عليها إلى المسجلات . توجد المسجلات فيزيائياً داخل وحدة الحساب والمنطق.

يحدد حجم المسجلات حجم البيانات التي يستطيع الحاسب إجراء الحسابات عليها، ويقاس حجم المسجلات بالبت بدلاً من البايت بسبب صغر حجمها. من الخطأ الشائع قياس قدرة المعالج إنه 32 بت استنادا إلى عرض ناقل النظام، بل الصحيح قياس قدرة المعالج بحجم مسجلاته، وعلى ذلك فإن جميع معالجات 486 وما بعدها هي من معالجات ال 32 بت وليس 64 بت، وبالمناسبة فإن معالجات 64 قد ظهرت منذ بضع سنوات، ولكنها لم تكن متوفرة أبداً سابقاً.

d.3 – الذاكرة المخبئية

الذاكرة المخبئية هي ذاكرة صغيرة تشبه الذاكرة العشوائية، إلا أنها أسرع منها وأصغر، توضع على ناقل النظام بين المعالج والذاكرة العشوائية (أنظر الشكل).

في أثناء عمل المعالج إذ يقوم هذا الأخير بقراءة وكتابة البيانات والتعليمات من وإلى الذاكرة العشوائية بصفة متكرره. المشكلة أن الذاكرة العشوائية تعتبر بطيئة بالنسبة إلى المعالج والتعامل معها مباشرة يبطئ الأداء. من أجل تحسين الأداء لجأ مصممو الحاسب إلى وضع هذه الذاكرة الصغيرة والسريعة بين المعالج والذاكرة العشوائية، كون المعالج يطلب المعلومات نفسها أكثر من مرة في أوقات متقاربة، فتقوم الذاكرة المخبئية بتخزين هذه المعلومات الأكثر طلباً من المعالج مما يجعلها في متناوله بسرعة حين طلبها. عندما يريد المعالج جلب بيانات أو تعليمات فإنه يبحث عنها أولاً في ذاكرة L1 ، فإن لم يجدها (فشل المعالج في إيجاد المعلومات التي يريدها من الذاكرة العشوائية يسمى "cache miss"، أما نجاحه في الحصول عليها من الذاكرة المخبئية يسمى "cache hit") بحث عنها في L2 ، فإن لم يجدها جلبها من الذاكرة العشوائية. إن حجم هذه الذاكرة وسرعتها مهمة جداً وذات تأثير كبير على أداء المعالج. ونستعرض هنا كلا العاملين.

حجم الذاكرة المخبئية

كانت معالجات 386 من دون ذاكرة مخبئية على الإطلاق، أما في المعالجات الأحدث فهناك أكثر من ذاكرة مخبئية واحدة، و يسمى كل منهما مستوى من الذاكرة :

- ذاكرة المستوى الأول .
- ذاكرة المستوى الثاني .
- يوجد في بعض معالجات شركة AMD ذاكرة من المستوى الثالث أيضاً، وتوجد على اللوحة الأم .

ونلاحظ أن كمية ذاكرة المستوى الأول أقل من ذاكرة المستوى الثاني ويرجع هذا إلى أن ذاكرة المستوى الأول غالية الثمن جداً لسرعتها الكبيرة جداً إذ تعطي المعالج البيانات التي يطلبها من دون تأخير تقريباً.

جدول (1) أنواع الذواكر المخبئية

	ذاكرة المستوى الأول	ذاكرة المستوى الثاني	ذاكرة المستوى الثالث
رمزها	L1	L2	L3
موقعها	داخل المعالج	داخل المعالج أو على اللوحة الأم	على اللوحة الأم
سرعتها	أسرع الجميع	وسط	الأبطأ
حجمها	صغيرة	وسط	كبيرة

المعالجات التي تحتوي هذه الذاكرة	جميع معالجات الجيل الرابع وما بعده	معالجات الجيل الخامس وما بعده ماعدا معالجات سيليرون الأصلية	معالجات AMD الحديثة فقط

يوجد في كل نوع من المعالجات كمية تختلف وفق كل مستوى، وكلما كانت الذاكرة المخبئية أكبر كلما كان ذلك أفضل لأنها تتمكن من جعل المعالج لا يدخل في حالة الانتظار وتسهل له الحصول على البيانات المطلوبة بأسرع وقت ممكن.

كما أن المعالج يستقبل بيانات وتعليمات. في بعض المعالجات تنقسم الذاكرة المخبئية إلى قسمينْ: واحدة خاصة للبيانات والأخرى للتعليمات. أما في بعض المعالجات الأخرى فلا يوجد هذا التقسيمْ بل تستخدم الذاكرة المخبئية لكليهما في الوقت نفسه، لا يوجد فرق حقيقي بين هاتين الطريقتين بالنسبة للأداء.

والذاكرة المخبئية، كأي ذاكرة أخرى، لها تردد تعمل عليه، وكلما كانت تعمل على تردد أسرع كلما كان ذلك أفضل، وترددها يعتمد على موقعها :

- عندما تكون الذاكرة المخبئية على ناقل النظام يكون ترددها هو نفس سرعة الناقل نفسه(غالباً 66 أو 100 ميجاهيرتز)
- الذاكرة المخبئية الموضوعة داخل المعالج (معالجات الجيل السادس) تعمل عادة بنصف سرعة المعالج (المعالجات بتردد 333 ميجاهيرتز أو أقل) أو سرعة المعالج نفسه (معالجات سيليرون و زيون وبنتيوم برو)
- معالجات الجيل الخامس جميعها تمتلك ذاكرة مخبئية من المستوى الثاني على اللوحة الأم، وترددها لا يزيد عن 66 ميجاهيرتز عموماً

مثلاً نستطيع أن نعرف سرعة الذاكرة المخبئية لكل معالج كما يلي :

- معالج بنتيوم بسرعة 200 ميجاهيرتز : سرعة ناقل النظام هي 66 ميجاهيرتز فتكون سرعة الذاكرة المخبئية الموجودة على اللوحة الأم هي 66 ميجاهيرتز.
- معالج بنتيوم الثاني 333 ميجاهيرتز، سرعة ناقل النظام فيه 66 ميجاهيرتز إلا أن الذاكرة المخبئية فيه موجودة داخل المعالج فتكون سرعتها تساوي 333 تقسيم 2 = 166.5 ميجاهيرتز .
- معالج بنتيوم الثالث زيون 500 ميجاهيرتز، له ذاكرة مخبئية بسرعة 500 ميجاهيرتز .

إن وضع الذاكرة المخبئية داخل المعالج له فائدتان : الأولى هي السرعة أما الثانية فتبرز في حالة تركيب أكثر من معالج واحد على اللوحة الأم، لأن كل معالج له ذاكرة عشوائية خاصة به.

11 ـ طريقة عمل المعالج

يؤدي المعالج وظيفته وفق الترتيب التالي :

1. يقرأ التعليمات من الذاكرة العشوائية ،(Fetch)،
2. يقرر ما هي البيانات اللازمة لتنفيذ التعليمات (Decode)،
3. يجلب البيانات اللازمة لتنفيذ تلك التعليمات (Address Generate)،
4. ينفذ التعليمات (Execute)،
5. يكتب النتيجة في الذاكرة العشوائية (Write Bake): و كون الذاكرة العشوائية بطيئة لذا تستعمل " ذاكرة الكتابة المخبئية (Write Buffer)" لحفظ البيانات لحين تمكن الذاكرة العشوائية من قراءتها .

1.11–التعليمات ومعالجات RISC و CISC

يقوم المعالج باستقبال البيانات (الصور، الرسوم.... إلخ) والتعليمات (وهي سلسلة الأوامر التي تصدر من البرامج في لغة المعالج) ويقوم بمعالجة البيانات تبعاً لما

تمليه عليه التعليمات، أي أنه ينفذ الأوامر الصادرة له (من البرنامج)، فمهمة المعالج أن ينفذ مجموعة التعليمات التي تصدر من البرنامج، حتى يؤدي الحاسب العمل المراد منه، والتعليمات يمكن أن تكون بسيطة (مثلاً القيام بعملية جمع) أو معقدة (كالقيام بسلسلة من العمليات المترابطة). فالبرنامج هو عبارة عن مجموعة كبيرة من التعليمات المترابطة التي تؤدي في مجملها عملاً مفيداً.

مثلاً : إذا أردت جمع الأعداد 8 + 9 + 3 فإن البرنامج يصدر الأوامر التالية للمعالج

1. اجمع : 8 + 9
2. اجمع : المجموع السابق + 3

هذا مثال عن أمرين (تعليمتين) بسيطين، هناك أوامر (تعليمات) للقيام بعمليات أكثر تعقيداً، ولكل معالج من المعالجات مجموعة من التعليمات التي يستطيع فهمها، فمثلاً قد يستطيع معالج ما فهم تعليمة معينة، بينما معالج آخر لا يفهمها، وهذا هو السر في اختلاف أنظمة الحاسب عن بعضها .

يخرج المعالج من المصنع " مستوعباً " هذه التعليمات أي أنه يستطيع تنفيذها، ويستطيع تنفيذ أي برنامج يحوي أي تركيب من هذه التعليمات مهما كان معقداً، ومهما كانت الوظيفة التي يقوم بها، وهذا هو السبب في أن الحاسب يستطيع القيام بأي عمل سبق أن حملته ببرنامج لأداء ذلك العمل. وقد انقسم مصنعو المعالجات في فلسفة بناء المعالج إلى فريقين :

1. الفريق الأول زوَّد معالجاته بالكثير من التعليمات المعقدة وتسمى هذه المعالجات معالجات CISC (Complix Instrection Set Computer) .

2. الفريق الثاني زود معالجاته بعدد قليل من التعليمات البسيطة وتسمى هذه المعالجات RISC(Reduced Instrection Set Computer) .

جدول(2) الفرق بين طريقتي بناء المعالجات

	RISC	CISC
أنظمتها	حاسبات ماكنتوش	حاسباتIBM
عدد التعليمات التي يدعمها المعالج	أقل	أكثر
عدد التعليمات اللازمة لتنفيذ برنامج ما	أكثر	أقل
الزمن اللازم لتنفيذ تعليمة	أقل	أكثر

إن الحكم على أي من المعالجين أسرع ليس أمراً بسيطاً، يعتمد ذلك على تصميم المعالج نفسه بشكل عام، وعلى برامج التجميع المستخدمة في إنتاج البرامج، وعلى عوامل أخرى، واليوم أصبح مصنعو المعالجات يتجهون إلى استعمال كلا الفلسفتين معاً، وأصبح الفارق بينهما يندثر شيئاً فشيئاً.

ما زالت المعالجات الحديثة تفهم التعليمات نفسها التي تفهمها المعالجات القديمة، فهي لا تستبدل ولكن زادت عليها العديد من التعليمات. ففي كل مرة ينتج المصنعون (مثل شركة إنتل) جيلاً جديداً من المعالجات يتم إضافة عدد من التعليمات لتحسين الأداء. أي أن أحدث معالج من إنتل يستطيع فهم التعليمات نفسها التي كان أقدم معالج من إنتل يفهمها. ويرمز للتعليمات التي تدعمها المعالجات المتوافقة مع IBM باسم "x86" وبذلك تسمى معالجات IBM باسم

"عائلة x86" وتشمل كل المعالجات التي تعمل على نظام IBM حتى من غير شركة إنتل .

جاء معالج 386 بـ 26 تعليمة جديدة، وجاء 486 بـ 6 تعليمات جديدة، وبنتيوم بـ 8 تعليمات جديدة، وأضاف MMX أيضاً 57 تعليمة جديدة .وأخرجت شركة AMD تعليمات لتسريع حسابات الفاصلة العائمة سميت D-NOW3 تشبه MMX ولكنها خاصة بأرقام الفاصلة العائمة .

وفي عام 1999 قدمت إنتل تعليمات MMX 2 وهي عبارة عن 70 تعليمة جديدة خاصة بعمليات الفاصلة العائمة، وزودت بها المعالج بنتيوم الثالث 500 ميجاهيرتز .

يمكن لمصنعي المعالجات أن يجعلوا معالجاتهم تعمل بوصفها معالجات CISC ظاهرياً، بينما تعمل في الحقيقة بوصفها كمعالجات RISC. و يتم ذلك بإضافة وحدة خاصة في المعالج تقوم بتحويل تعليمات CISC إلى RISC ومن ثم يقوم المعالج بتنفيذها، لذا فالمعالج الذي يعمل بهذه الطريقة هو في الحقيقة معالج RISC إلا أنه يعمل في الظاهر وكأنه معالج CISC. ولكن هذه الطريقة تجعل تركيبة المعالج معقدة .

2.11-أنماط عمل المعالجات

أنماط العمل هي وصف للبيئة التي يعمل فيها المعالج من حيث قدرته على الوصول للذاكرة العشوائية، و قدرته على تشغيل أكثر من برنامج في الوقت نفسه، إن نمط العمل لمعالج ما في وقت من الأوقات يتحدد بنظام التشغيل الذي

يستخدمه، وكذلك على نوع المعالج الذي يتم استخدامه، وهذه مقارنة بين أنماط عمل المعالجات :

جدول(3) مقارنة بين أنماط عمل المعالجات

	النمط الحقيقي	النمط المحمي	النمط الحقيقي التخيلي
المعالجات التي تستطيع العمل في هذا النمط	جميع المعالجات	الجيل الثاني وما أحدث	الجيل الثالث وما بعده
كمية الذاكرة العشوائية التي يستطيع الوصول لها (ميجابايت)	1	يعتمد على عرض ناقل العناوين	1
عدد البرامج التي يمكنه تشغيلها في الوقت نفسه	1	غير محدود	1
سرعة القراءة والكتابة للذاكرة العشوائية	بطيئة	سريعة (32 بت)	بطيئة
نظام التشغيل الذي يعمل في هذا النمط	دوس	جميع أنظمة تشغيل ويندوز ويمكن لدوس الآن العمل به بمساعدة بعض البرامج	جميع أنظمة وندوز
دعم الذاكرة التخيلية	لا	نعم	لا

يسمى النمط المحمي في بعض الأحيان " نمط 386 المحسن " لأن معالجات 386 هي أول معالجات تسمح بالانتقال بين النمطين المحمي والحقيقي بحرية، من دون إعادة تشغيل الحاسب، بينما يستطيع المعالج 286 الانتقال دورة واحدة

فقط، أما معالج الجيل الأول فلا يمكنه ذلك على الإطلاق فهو يعمل في النمط الحقيقي فقط .

بالنسبة للنمط الحقيقي التخيلي فهو ميزة أضيفت على أنظمة التشغيل وندوز لتتيح لها تشغيل نافذة دوس من داخل وندوز – إذا كنت قد استعملت هذه النافذة فستعرف ما أتحدث عنه .

3.11-العوامل المؤثرة على سرعة المعالج

ليست سرعة المعالج هي العامل الوحيد الذي يقرر سرعة الحاسب، بل المهم أيضاً سرعة حركة البيانات بين الأجزاء المختلفة في الحاسب وبخاصة من وإلى المعالج.

هناك الكثير من الطرق التي تستخدم لقياس سرعة المعالجات، كما إن المعالجات المختلفة تتفاوت فيما بينها في المجالات المختلفة، فقد يتفوق بعضها على الآخر في حسابات الفاصلة العائمة فيما يتفوق الآخر في أمور أخرى وهكذا. لكن، هناك عاملان أساسيان يتحكمان في أداء المعالج هما :

- تردد الساعة
- معمارية المعالج

إن مقارنة معالجين بسرعة تردد الساعة لهما، فقط، يعتبر مقارنة خاطئة إذا كان المعالجان مختلفين في المعمارية، يمكننا مثلاً أن نقول إن معالج بنتيوم 233 ميجاهيرتز أسرع من معالج بنتيوم 200، ولكن لا يمكنك أن تقول إنه أسرع من بنتيوم 200 ميجاهيرتزMMX لأن جزءً من معمارية المعالج تختلف.

<u>a- تردد المعالج</u>

يقصد بتردد المعالج تردد الساعة التي يعمل عليها المعالج، كلما كان تردد الساعة أعلى كلما أصبح بإمكان المعالج عمل أشياء أكبر في وقت أقل. وتقاس سرعة المعالج بالميجاهيرتز ويساوي مليون دورة في الثانية. معالج سرعة تردده بـ 200 ميجاهيرتز قادر على عمل 200 مليون دورة (Cycle)في الثانية، أما كم العمليات الحسابية التي تتم في هذه الدورة فهذا راجع لبنية المعالج، والجيل الذي ينتمي إليه وفق الآتي :

جدول(4)

المعالج	عدد الدورات اللازمة لإتمام عملية جمع واحدة
386	6
486	2
pentium	1أو أقل

عندما نقول إن هذا المعالج تردده 400 ميجاهيرتز مثلاً، فإن ذلك يعني أن تردد جميع ما في داخل المعالج، ما عدا الذاكرة المخبئية التي يكون ترددها، أحياناً، نصف تردد المعالج.

هذا بالنسبة للمعالج، أما الأجزاء الأخرى المتصلة به، فلا تعمل بهذه السرعة الكبيرة بسبب ثمنها الباهظ جداً بل تعمل بسرعات أقل من المعالج. فناقل النظام يعمل في الغالب بتردد ما بين 66 أو 100 ميجاهيرتز، وفي بعض المعالجات

بتردد 133 وفي المعالج "أثلون" الجديد بتردد 200 ميجاهيرتز، ويتوقع أن يزيد إلى 400 ميجاهيرتز. وهناك علاقة تحكم تردد المعالج وتردد الناقل وهي:

تردد المعالج = تردد الناقل × عامل المضاعفة (أو يسمى عامل الجداء)

مثال : تردد معالج هو 450 ميجاهيرتز = 100 هيرتز × 4.5 (عامل الجداء)

وبما أن هناك علاقة بهذا الشكل فهذا معناه أن نقل البيانات بين هذين الجزأين منظم بطريقة تزامنيه، أي أنه في حالة تردد الناقل 100 ميجاهيرتز، وتردد المعالج 500 ميجاهيرتز فإن كل 5 دورات للمعالج تقابلها دورة واحدة للناقل. ويسمى هذا النوع من النقل بالنقل المتزامن للبيانات بعكس النقل غير المتزامن حيث لا تكون هناك علاقة ثابتة بينهما.

فيما مضى (عندما كانت حاسبات 386 وما قبلها سائدة) لم نكن نحتاج أن تكون سرعة الناقل تختلف عن سرعة المعالج الداخلية، حيث كانت سرعة المعالج مجرد 50 ميجاهيرتز أو أقل، لذا كانت سرعة المعالج هي نفسها سرعة الناقل. ولكن برزت الحاجة لجعل تردد الناقل يختلف عن تردد المعالج منذ حاسبات 486 حين زادت سرعة المعالج عن سرعة الناقل.

وتردد المعالج ليس هو كل شئ فيما يتعلق بالسرعة في معالجة البيانات، بل هناك تقنيات أخرى تزيد وتعزز من أداء المعالج، كما أن هناك تفاوتاً من معالج إلى آخر في بعض المجالات، فقد تجد أن معالجاً ما يتفوق في حسابات الأرقام الصحيحة، ومعالجاً آخر يتفوق في الذاكرة المخبئية وهكذا.

b– قوة وحدتي الفاصلة العائمة ووحدة الأرقام الصحيحة

إن وحدة الأرقام الصحيحة هي جزء مهم من المعالج، لأن أغلب عمليات الحاسب تتم في هذا الجزء، كما يجب الانتباه إلى أن المعالج الذي لديه وحدة أرقام صحيحة ممتازة ليس معناه أن وحدة الفاصلة العائمة عنده ممتازة أيضاً، إن معالجات شركة إنتل هي الأفضل حتى الآن في مجال الفاصلة العائمة.

تستعمل الفاصلة العائمة في برامج الألعاب والجداول الإلكترونية، بينما تستخدم وحدة الأعداد الصحيحة في التطبيقات الأخرى.

c–سرعة الناقل

يضمن الناقل السريع توصيل البيانات بالسرعة التي تجعل المعالج لا يكون في حالة انتظار، ويعتبر كلاً من تردد الناقل وعرضه مهماً، وفيما يكون عرض ناقل النظام 64 بت في المعالجات الحديثة جميعها فإن تردد الناقل هو الذي يحكم به على سرعة الناقل:

سرعة الناقل (بت / ثانية) = عرض الناقل (بت) × تردده (هيرتز)

4. 11 – صناعة المعالجات

لا تحتكر شركة IBM صناعة المعالجات كما قد تتصور، بل إن أشهر وأحدث المعالجات هما من شركتي إنتل و AMD بينما تفرغت شركة IBM لعمل معالجات لمنصات أخرى غير الحاسب الشخصي.

تتم صناعة المعالجات من عدة مصنّعين أشهرهم شركتا إنتل و AMD. وقد كانت معالجات شركة إنتل لفترة طويلة جداً هي الشركة الرئيسية المصنِّعة للمعالجات

بينما كانت باقي الشركات تكتفي بتقليدها، إلى أن بدأت شركة AMD المنافسة الجدية بطرح معالجها المسمى "أثلون" إذ أصبحت تعتبر الآن لاعباً أساسياً في السوق.

تمر صناعة المعالج بالكثير من الخطوات الطويلة والمكلفة، وصناعة معالج حديث قد تستغرق 90 يوماً من العمل (طبعاً تتم صناعة المعالجات بأعداد كبيرة) باستخدام تقنيات عالية جداً. ويتكون الترانزستور من مادة شبه موصلة، غالباً ما تكون السيليكون. إن أول خطوة لصناعة المعالج هي جلب السيليكون (موجود بكثرة في الرمال الصحراوية البيضاء) ومعالجته بشكل خاص ودقة تامة، ليصبح في النهاية على شكل كريستال حجم الواحدة منها يقارب العشرين سنتيمتراً، وتقطع بواسطة أدوات خاصة إلى شرائح، و سمك كل شريحة منها أقل من 1 مليمتر – تخيل – وقطرها 20 سم (عملية دقيقة جداً) وتستعمل كل واحدة من هذه الرقاقات، بعد المعالجة، في صنع ما يقرب من 140 معالج، يعطب منها حوالي 20 . وتكفي الكريستالة الواحدة لصنع الآلاف من المعالجات وكلما كانت شريحة السليكون أقل سمكاً كلما تمكنا من إنتاج معالجات أكثر بكتلة الكريستال نفسها وهذا يخفض التكالفة.

تأتي بعد ذلك مرحلة تصميم المعالج (على الورق)، وهذه عملية تأخذ الكثير من الوقت وقد تستهلك جهد عمل المئات بل الآلاف من المهندسين لشهور أو سنين. بعد ذلك تبدأ عملية التصنيع باستخدام أدوات دقيقة جداً، وأجهزة حاسب آلي ضخمة جداً، ومكلفة جداً ويتم تصنيع الترانزستورات باستخدام الضوء ومواد حساسة للضوء على شكل طبقات، تختلف باختلاف المعالج وحسب تعقيده لتنتج

لنا من كل رقاقة كما قلت المئات من المعالجات، فتقطع هذه الرقاقة إلى مئات القطع، لتكون كلٌّ قطعة معالجاً قائماً بذاته.

تأتي بعد ذلك عملية وضع كل رقاقة من هذه الرقاقات داخل غلاف لها لحمياتها من العوامل الخارجية ولتسهيل حملها والتعامل معها، ولكل معالج طريقته في التغليف ويعتبر التغليف، أيضاً عملية معقدة بسبب عدد الإبر الكبير (المئات).

قد لا تعمل بعض القطع من هذه الرقاقات نتيجة عطب يصيب بعض أجزاء السيليكون، أيضاً وقد يعمل بعض هذه القطع بشكل أسرع من الأخريات لذا نجد الاختلاف في سرعات الساعة للمعالجات. كما إن نسبة المعالجات المعطوبة في هذه العملية ككل تؤثر في سعر المعالج، وكلما شرع المهندسون في تصميم معالج جديد يكون غالي الثمن في البداية، بسبب قلة الخبرة التي تجعل نسبة المعالجات المعطوبة قليلة جداً، لأنه مع الوقت تقل النسبة وينخفض سعر المعالج.

يحرص مصنعو المعالجات على تصميم معالجات من شرائح سيليكون صغيرة بقدر الإمكان لأن ذلك يعني نسبة أقل من المعالجات المعطوبة وتخفيض التكالفة، وتخفيض الحرارة الناتجة. و المعالجات تصبح أكثر قوة مع الوقت، ولكي تكون أكثر قوة لابد أن تحوي عدداً أكبر من الترانزستورات في حجم صغير، فتستعمل معماريات أصغر للمعالج كي تتيح لنا ذلك .

جدول(5) يبين مميزات معالجات الجيل الأول والثاني والثالث

المعالج				intel 386		
	8086	8088	80286	DX	SX	SL

سنة الانتاج	1978	1979	1982	1989-1985	1992-1988	1991-1990
التردد (ميجاهيرتز)	من 5 إلى 10	من 5 إلى 8	من 6 إلى 12	من 16 إلى 33	من 16 إلى 33	من 20 إلى 25
عدد الترانزيستورات (ملايين)	0.029	0.029	0.134	0.275	0.275	0.855
عرض ناقل المعالج (بت)	16	16	16	32	32	32
الذاكرة المخبئية المستوى 1 (kb)	-	-	-	-	-	-
الذاكرة المخبئية المستوى 2 (kb)	-	-	-	-	-	-
المقبس	-	-	-	-	-	-
عدد إبر المقبس						
رتبة المعالج (ما يكرون)	3	3	1.5	1.5 / 1	1.5 / 1	1
تقنيات تحسين الأداء						
فولتية المعالج (فولت)	5	5	5	5	5	5

جدول(6) يبين مميزات معالجات الجيل الرابع

المعالج	intel 486				
	DX	SX	SL	DX2	DX4
سنة الانتاج	1991– 1989	1992– 1991	1992	1992	1994
التردد (ميجاهيرتز)	من 25 إلى 50	من 16 إلى 33	من 20 إلى 33	من 50 إلى 66	من 75 إلى 100
عدد الترانزيستورات (ملايين)	1.2	1.185	1.4	1.2	1.6
عرض ناقل المعالج (بت)	32	32	32	32	32
الذاكرة المخبئية المستوى 1 (kb)	8	8	8	8	16
الذاكرة المخبئية المستوى 2 (kb)	–	–	–	–	–
المقبس	socket 1,2 and	socket 1,2 and	socket 1,2 and 3	socket 1,2 and	socket 1,2 and 3

	3	3		3	
عدد إبر المقبس	مختلف لكل مقبس				
رتبة المعالج (مايكرون)	1 / 0.8	1 / 0.8	0.8	0.8	0.6
تقنيات تحسين الأداء					
فولتية المعالج (فولت)	5	5	5	5	3.3

جدول(7) يبين مميزات معالجات الجيل الخامس

الشركة والمعالج	intel pentium		AMD-K5
	PENTIUM	pentium MMX	
سنة الانتاج (ميلادي)			96 - 97
التردد (ميجاهيرتز)			75 - 166
عدد الترانزيستورات (ملايين)	3.1	4.5	4.3
عرض ناقل النظام (بت)	64	64	64
عرض ناقل المعالج (بت)	32	32	32
الذاكرة المخبئية المستوى 1 (kb)	16	32	16 + 8
الذاكرة المخبئية المستوى 2 (kb)	512 أو 256 أو 0	512 أو 256 أو 0	

المقبس	socket 4,5,6 and 7		
عدد إبر المقبس	321		
رتبة المعالج (ما يكرون)	0.8	0.35	0.35
تقنيات تحسين الأداء			
فولتية المعالج (فولت)	5	2.8	3.5

جدول(8) يبين مميزات معالجات الجيل السادس

المعالج		intel pentium II						pentium III				
	pentium pro	klamath	deschutes	celeron		XEON	katarni	XEON	coppermine	K6	K6-2	K6-3
سنة الانتاج (ميلادي)	95-97	97	98	98	98 - 99	98			99	97 - 98	98 - 99	99
التردد (ميجاهيرتز)	150 - 200	233 - 300	333 - 450	266 - 300	300 - 500	400 - 450	450 - 600	500 - 550	533 - 600	166 - 300	266 -500	400 - 450
عدد الترانزستزات (ملايين)	5.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	9.5	9.5		8.8	9.3	21.3
عرض ناقل النظام (بت)	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
عرض ناقل المعالج (بت)	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32
الذاكرة المخبئية المستوى 1 (kb)	16	32	32	32	32	32	32	32	32	64	64	64

الذاكرة المخبئية المستوى 2 (kb)	256 أو 512	512	512	0	128	512	512	512				256
المقبس	socket 8	slot 1	slot 1	slot 1	slot 1	slot 2	slot 1	slot 2	slot 2	socket 7		
عدد إبر المقبس	387									321		
رتبة المعالج (مايكرون)	0.35	0.35	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.18	0.35	0.25	
تقنيات تحسين الأداء		MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX	MMX
فولتية المعالج (فولت)	3	2.8	2		2.0	2.0	2.0	2.0		2.9 – 3.2	3.5	2.5

جدول(9) يبين مميزات معالجات الجيل السادس

المعالج	K7 (athlon)
سنة الانتاج (ميلادي)	99
التردد (ميجاهيرتز)	500 – 700
عدد الترانزسترات (ملايين)	22
عرض ناقل النظام (بت)	64
عرض ناقل المعالج (بت)	32
الذاكرة المخبئية المستوى 1 (kb)	128
رتبة المعالج (ميكرون)	0.25
تقنيات تحسين الأداء	
فولتية المعالج (فولت)	

الفصل الثانـي

البرمجة على الحاسوب.

1 ـ مقدمة:

تعتبر البرمجة فن الكتابة، التي تمزج فيها عناصر من العلوم والرياضيات والفيزياء وعلوم الكومبيوتر، في مجموعة تعليمات بحيث يستطيع الكومبيوتر تحقيق هدف علمي (من حل مسألة فيزيائية أو بناء نمذجة لدراسة ظاهرة فيزيائية). عند كتابة البرامج يجب مراعاة مايلي:

- ان تكون البرامج بسيطة، وسهلة القراءة، وسهلة التحليل. (إذا كانت كتابة البرامج صعبة على المبرمج، هذا لا يعني أن قراءتها صعبة على الآخرين).
- أن يكون مضمون البرنامج سهل الفهم.
- ان تكون البرامج سهلة التعديل.
- يمكن للآخرين الاستعانة بالبرنامج والاستفادة منه وتطويره.
- إعطاء الإجابات الصحيحة.

إن الحاسبات تنفذ المطلوب منها بالضبط، لذلك كانت كتابة البرامج ليست أمراً سهلاً، البرامج التي تكتب تكون معقدة جداً وهنالك العديد من الطرق المنطقية لكتابتها. لذلك يجب في البداية فهم آلية عمل الحاسوب. الأوامر التي يفهما الحاسب يجب أن تكون مكتوبة بلغة الآلة التي تعطي الأوامر لانتقال المعلومات المخزنة في الذاكرة من مكان الى مكان أخر، أو لتنفيذ أمر معين، بشكل رقمي. إن كتابة الأوامر للحاسوب ليفهمها وينفذها هي من الأمور الصعبة على علماء الحاسوبية، لذلك عند كتابة أي برنامج، نعطي الأوامر إلى الحاسوب عن طريق شرائح، أو عن طريق لغات برمجة عالية المستوى. في النهاية هذه الأوامر تصبح مترجمة إلى لغة الآلة.

تمثل لغة الآلة عادة بالأعداد الثنائية المكونة من أحاد وأصفار. والبرمجة لغة إطلالة معقدة وتفصيلية. وفي درجة أعلى من سلم الترتيب الهرمي للغات البرمجة توجد لغة التجميع. وفيها تستبدل سلاسل الآحاد والأصفار بالرموز، بحيث تعطي الأوامر بأكواد رمزية تسمى نيمونيك. و على ذلك نحتاج إلى برنامج مجمع لترجمة لغة التجميع إلى لغة الآلة. وبما أن تركيب لغة التجميع مشابه جدا للغة الآلة، فهذا يتطلب من مخططي البرامج المتعددة أن يهتموا بالتفاصيل المتعددة مثل الفهرسة وأماكن التخزين، بالإضافة إلى كتابة سلسلة من الأوامر المعقدة.

نستطيع الآن أن نكتب برامج الحاسب بلغة مقاربة للغة الإنكليزية مثل FORTRAN, COBOL, C++ إلى أخره.... و تسمى هذه بلغات رفيعة المستوى وتكاد تكون مستقلة عن الآلة، ويمكن، بتعديلات بسيطة، استخدام البرامج المكتوبة بهذه اللغات طالما وجد المترجم الخاص بها على هذه الآلة. والمترجم هو عبارة عن برنامج خاص، يترجم تعليمات البرنامج المكتوب باللغات الرفيعة المستوى الى لغة الآلة.

على الرغم أن اللغات رفيعة المستوى أقل كفاءة من لغة الآلة أو لغات التجميع، إلا أنها تخلّص مخطط البرنامج من عبء الاحتفاظ بالتفاصيل الدقيقة مثل أماكن التخزين، الخ... بالإضافة إنها أسهل في التعلم والاستخدام.

2 - الكمبيوتر القابل للبرمجة:

تعني البرمجة كتابة البرامج الحاسوبية بأسلوب علمي، يضمن حلولاً حقيقية دقيقة للمسائل البرمجية باستخدامُ إحدى لغات البرمجة، وتمثل لغات البرمجة الأداة الأساسية المستخدمة في كتابة وتنسيق وترجمة وتنفيذ البرامج.

كانت البرامج في البداية تكتب من قبل الخبراء والمبرمجين المتطورين، ولم يكن هنالك بالأصل مبرمجين غير متطورين، فكانت البرامج تكتب في صورة سلاسل من الأصفار والآحاد (10010101) أي بنظام العد الثنائي، فكانت كل ثمانية خانات من الأصفار والآحاد تكون رقما، وكان كل حرف يشار إليه برقم. كانت

العملية صعبة جدا فإذا أردت أن تكتب أبسط عبارات البرمجة عبارة (if) يجب أن تكتب 16 خانة من الأصفار والآحاد حتى تحقق ذلك، وتبين بعد فترة عدم جدوى هذه الطريقة، وقد توصل العلماء بعد تفكير طويل، إلى فكرة أخرى هي العبارات البرمجية. وبدأت هنا لغات البرمجة بالظهور، أو تكتب البرامج على شكل مستندات نصية وثم تحول إلى الصورة البتية، أي ملفات الأصفار والآحاد، وعملية التحويل هذه تتم ببرامج أخرى مختلفة. تطورت بعد ذلك لغات البرمجة وظهرت الكثير من اللغات الجديدة ولكل منها طريقتها الخاصة في تحويل ملفات المبرمج إلى أوامر لجهاز الكمبيوتر.

يمكن تصنيف لغات البرمجة ب:

- لغة الآلة Machine Language : وهي اللغة الوحيدة التي يفهمها الحاسب وتتكون من أرقام (1,0) صورة سلاسل من الأصفار والآحاد(10010101) أي بنظام العدّ الثنائي.
- لغة التجميع Assembly Language: وهي لغة تستخدم اختصارات معبرة من اللغة الإنكليزية، لتعبر عن العمليات الأساسية التي يقوم بها الحاسب من إضافة add وطرح sub وحفظ store وتتعامل مباشرة مع مجموعة مواقع في الذاكرة تسمى السجلات Register .
- لغات المستوى الأعلى High level Language: وهي لغات تستخدم كلمات اقرب الى لغة الإنسان مثل اللغة الانكليزية، هنالك الكثير من هذه اللغات مثل (بيسك basic باسكل Pascal و فورتران Fortran و C++ ...... الخ
- أما البرامج التطبيقية فهي برامج صممت بواسطة المبرمجين لحل مشاكل برمجية، وتضم حزم البرامج الجاهزة ، والتي تتولى شركات مثا مايكروسوفت إنتاجها مثل حزمة برامج Office، وبرامج تطبيقات تصمم لحل مسائل برمجية بسيطة بواسطة لغات البرمجة.

3 ـ لغات البرمجة:

تنقسم لغات البرمجة المعروفة، وفق كيفية تحويل النصوص البرمجية، إلى أوامر إلى قسمين أساسيين هما :

3-1 اللغات البرمجية المصنفة: Compiled Programming Languages

وتكتب هذه اللغات في صورة ملفات نصية بسيطة Plain Text ، ثم تخضع لعملية تسمى عملية الربط والتصنيف ; فتحول إلى ملف قابل للتنفيذ Executable File وذلك باستخدام برنامج يدعى المصنف Compiler ، ويكون الملف التنفيذي عبارة عن ملف مكون من شفرة ثنائية Binary Code غير مفهومة من قبل البشر (الأصفار والآحاد)، وعند تنفيذ البرنامج فإن الأوامر المخزنة في الملف تنفذ مباشرة و ترسل إلى نظام التشغيل Operating System الذي يرسلها بدوره إلى المعالج Proccessor الذي يقوم بعملية التنفيذ، أي أنك مجرد تصنيف البرنامج وربطه، ستحصل على برنامج مستقل ولن تحتاج إلى البرنامج المصنف أو الشفرة المصدرية بعد الآن. وتتميز هذه البرامج بكونها سريعة وصغيرة الحجم إلا أنها أصعب استخداما وتعلما. ومن أشهر هذه اللغات البرمجية Assembly و C و ++C و Delphi.

3-2 اللغات البرمجية المترجمة Interpreted Programming Languages

تكتب شفرات هذه البرامج أيضا في صورة ملفات نصية بسيطة Plain Text، إلا أنها لا تخضع لعملية الربط والتصنيف بل لعملية أخرى تسمى الترجمة Interpreting باستخدام برنامج يدعى المترجم Interpreter . يقوم المترجم بقراءة الشفرة وتنفيذها مباشرة سطرا بسطر، أي أن النص البرمجي غالبا يظل كما هو من دون تحويل وعند الانتهاء من كتابة البرامج يقوم المترجم بترجمته إلى أوامر، لذلك فإن البرنامج لن يعمل من دون وجود المترجم. وفي بعض الأحيان ينتج ملف تنفيذي فيكون في صيغة وسطية بين الشفرات والبرامج الكاملة إذ يحتاج

إلى جزء من المترجم فقط. ولأن، الأوامر هنا لا توجه مباشرة إلى نظام التشغيل، فإن هذه البرامج تكون بطيئة نسبيا، وأكبر في الحجم (تحتاج إلى حجم إضافي للمترجم) وأشهر اللغات البرمجية المترجمة Basic Visual و Java و Perl و . PHP

يمكن تلخيص ما سبق بأن البرنامج يحتاج في كل الحالات كلها إلى تحويل، يتم لحظيا في البرامج المترجمة حسب الحاجة، لذلك فهي تستغرق وقتا أطول للتنفيذ. وفي البرامج المصنفة، فإن التحويل يتم دفعة واحدة، أي أن الوقت الذي يصرفه المترجم، والذي يجعل تنفيذ البرنامج بطيئا، يكون قد صرف مسبقا في البرامج المصنفة في أثناء عملية التصنيف

4 ـ تقنيات البرمجة

تطورت الأساليب والتقنيات المستخدمة في كتابة البرامج عبر السنين، ويرجع ذلك إلى تغير متطلبات البرمجة وأهميتها وأهدافها.

4-1 البرمجة الإجرائية Procedural Programming

البرنامج الإجرائي هو لائحة من الأوامر تعطي خطوة خطوة، وهي الطريقة التي يعمل بها المعالج والكمبيوتر بشكل عام لأن الكمبيوتر ينّفذ ولا يفكر. يستخدم هذا الأسلوب لكتابة البرامج الصغيرة والمهمة جدا، والتي تحتاج إلى ميزات عالية، ووصول إلى أجزاء حساسة من الحاسوب مثل إدارة الإقلاع Booting. ومن هذه اللغات البرمجية لغة Assembly.

4-2 البرمجة البنيوية Structured Language

هو تطبيق عملي لمبدأ فرق تسد، وتقوم فكرتها على أساس تقسيم البرامج إلى عدة أقسام يستدعي كل منها الآخر، فمثلا إذا أردت أن تكتب برنامجا يقوم

بحساب عدد الموظفين في الشركة، يمكن تقسيم عمل البرنامج إلى التالي :

- فتح قاعدة البيانات
- معرفة عدد السجلات
- إغلاق قاعدة البيانات
- عرض النتيجة
- إغلاق البرنامج

إضافة إلى ذلك، فإن هذا البرنامج، بأكمله، يمكن أن يكون مجرد وظيفة في برنامج آخر أكبر، وهكذا، توجد في هذه التقنية عدة دوال أو وظائف Functions كل وظيفة لها دخل خاص بها، وتعطي خرجا خاصا بها، ويتم تبادل هذه البيانات (الدخل والخرج) بين الدوال المختلفة، فتستدعي كل دالة الأخرى وهكذا. وهذا يسهل العمل على المبرمج ويجعل الأمور تبدو واضحة أمامه. وإذا أراد تحسين البرنامج فهذا أمر سهل، فمثلا إذا أراد أن يغير أسلوب عرض النتيجة لن يضطر إلى البحث في سطور البرنامج عن الأماكن التي حدث فيها عرض النتيجة على الشاشة، بل سيضطر، فقط، إلى تغيير التابع الذي يقوم بعرض النتيجة، ولن يضطر للمساس بباقي توابع البرنامج، وسوف يظهر أثر التغيير الذي قام به في جميع الأماكن التي تستدعي الدالة التي غيّرها، وفي هذا الأسلوب من البرمجة يتم تخزين البيانات في متغيرات، وهذه المتغيرات تكون إما عامة Public أو خاصة Private، المتغيرة العامة هي المشتركة بين جميع دوال البرنامج، والخاصة تظهر فقط في دالة محددة، لذلك نستخدم متغيرات عامة لتبادل البيانات. يمكن تشبيه الموقف بشركة كبيرة فيها عدد من الأقسام (الدوال) كل قسم له وظيفته، البيانات الموجودة داخل القسم لا يستطيع أن يصل إليها إلا من في القسم. إذا أردت أن تضع معلومات يستطيع الجميع الوصول إليها لا بد من وضعها في الأرشيف العام للشركة، الذي يستطيع الوصول إليه والقراءة منه والكتابة إليه، ومن أشهر اللغات التي تستخدم هذا الأسلوب لغة C.

3-4 البرمجة الكائنية المنحى Object Oriented Programming OOP

هي أرقى أنواع البرمجة، وفيها يقسم البرنامج إلى وحدات تسمى الكائنات، والكائن هو كتلة من الدوال والمتغيرات، يستطيع الكائن أن يحاكي الأمور الحياتية بواقعية أكثر، ويصبح المبرمج منظما أكثر، كنا نقول في السابق بأنك إذا أردت معلومة ما من قسم آخر يجب أن تكون هذه المعلومة متوفرة في الأرشيف العام، ولكن هذا يؤدي إلى فوضى عارمة في الأرشيف، إذ يمكن للمبرمج أن يعطي مثلا الإسم نفسه لمتغيرتين مختلفتين في الأرشيف، ويحصل على نتائج غير متوقعة من دون أن يعرف الخطأ بسهولة. والمشكلة الأكبر تحدث عندما يكون البرنامج عبارة عن مشروع ضخم يديره فريق كامل من المبرمجين، فتصبح عملية التنسيق بينهم صعبة جدا.

نعود بالحديث الان إلى الكائنات. يتكون الكائن، كما قلنا، من جزأين أساسيين هما الدوال والمتغيرات. وعملية إنشاء الكائن تتلخص في خطوتين: الخطوة الأولى، هي تعريف البرنامج بشكل الكائن، والخطوة الثانية هي إنشاء الكائن حسب الشكل الذي حددته في الخطوة الأولى. ترسم الإطارات الخارجية في الخطوة الأولى وتكتب الدوال للكائن، وتحدد متغيراته، وتبين فيها العام والخاص، ويسمى هذا بالصنف Class وقد رافقت فكرة البرمجة الكائنية ثورة عارمة وظهور لتقنيات وأفكار جديدة أهمها:

اشتقاق الكائنات Subclassing:

يمكنك بهذه الطريقة عمل كائنات جديدة، معتمدا على كائنات موجودة مسبقا، مع إضافة بعض الأجزاء إليها.

تعدد الأوجه Poly : Polymorphism يعني عديد و morphism يعنى الوجه أو الهيئة، تمكنك هذه الميزة من عمل أكثر من دالة لها الاسم نفسه ولكنها تختلف

في قائمة الوسيطات (المدخلات). فإذا كتبت اسم وظيفة فإن البرنامج سيرى ما هي المدخلات التي تريد أن تدخلها في هذه الوظيفة، ويرى بعد ذلك ما هي الوظيفة التي تأخذ هذه المدخلات فيجعلها تعمل من دون غيرها. ويمكن الاستفادة من ذلك في عدة أمور، مثلا عملية الجمع بالنسبة للنصوص تختلف عنها بالنسبة للأرقام، وتختلف عنها بالنسبة للكسور الاعتيادية، فهنا يمكنك عمل عدة وظائف الاسم نفسه، وإذا كتب هذا الاسم ووضعت فيه نصوصا بوصفها مدخلات فإن الوظيفة الخاصة بالنصوص هي التي ستنفذ وليست الوظيفة الأخرى الخاصة بالأرقام، ولا الخاصة بالكسور، وهكذا.

ومن أشهر البرامج التي تعمل بأسلوب البرمجة الكائنية المنحى C++ و Java و Basic Visual و Delphi وجميع لغات البرمجة الحديثة، و قد تم تطويرها لتعمل وفق نظام البرمجة الكائنية المنحى.

4-4 البرمجة المرئية Visual Programming

البرمجة المرئية هي عبارة عن أسلوب جديد للبرمجة. تستخدم فيه برامج مساعدة لتصميم واجهة الإستخدام (الأزار والنصوص ..) وربطها بالشفرة البرمجية، وتسمى هذه البرامج المساعدة ببيئة التطوير المدمجة Integrated Development Environment IDE.

كانت البرامج في السابق تستخدم ما يسمى بسطر الأوامر Command Line أو المحث، فكان يظهر البرنامج في صورةِ عدة أسطر ثم يتوقف ليقول لك. (أدخل اسمك ثم اضغط مفتاح Enter) ولم يكن له وظيفة إلا انتظارك لتدخل اسمك ثم يكمل عمله طبيعياً. أما الآن، ومع الواجهات الرسومية، تظهر أمام المستخدم عشرات الأزرار والخيارات والقوائم وغيرها، ولا يمكن للبرنامج أن يتوقع ما الذي سيحدث في الخطوة التالية، لذا فإن البرنامج يقسم إلى عدة وظائف، ينفذ كل منها عندما يحدث ما يسمى بالحدث، نقرة الزر مثلا تعتبر حدثا، ضغط أحد المفاتيح

يعتبر حدثا، الإتصال بالإنترنت يعتبر حدثا، كل هذه تعتبر أحداثاً، وتسمى الدالة التي تعمل عند حدوث الحدث بالدالة الحدثية أو الدالة المرتبطة بالحدث.

ومن أشهر بيئات التطوير الرسومية Visual C++ و Visual Basic و Visual J++ و Delphi و Borland C++ و Borland C++ Builder و Java Builder وغيرها الكثير. وتستخدم هذه البرامج نسخاً محسنة من لغات البرمجة العادية والقديمة، وتدمجها في بيئة التطوير الخاصة بها، لذلك فإن Delphi مثلا ليست لغة برمجة بمعنى الكلمة، وإنما هي بيئة تطوير تستخدم لغة محسنة من Pascal، تتميز بميزات الكائنات وميزات أخرى فيطلق عليها مجازا لغة Delphi.

5 ـ لغات المستوى الأعلى High level Language:

تعرف البرمجة بانها الطريقة التي يتم استخدمها للتخاطب مع الحاسب، وذلك لكي ينجز عملاً معيناً باستخدام لغة خاصة تدعى لغة البرمجة.

تصنف اللغات البرمجية الحديثة والعالية المستوى إلى:

- **اللغات الإجرائية:** تشمل هذه اللغات سلسلة من الخطوات التي ينبغي إتباعها للحصول على النتيجة، يقوم المبرمج بوضع هذه الخطوات والتي تبلغ الكمبيوتر بأن ينفذ شيئاً ما.
- **اللغات البرمجية غرضية التوجه:** تستخدم هذه اللغات التقنيات المعتمدة على مبدأ الكائن، هو عبارة عن معطيات مهيكلة مع مجموعة من الإجرائيات، تدعى بالطرائق وتقوم بتحليل المعطيات.

1.5- اللغات الإجرائية

تشمل لغات البرمجة الإجرائية كلاً من لغات Basic , Pascal ,Fortran, C++. أما الميزات الأساسية لمعظم اللغات الإجرائية فهي:

- المصطلحات الخاصة؛
- أنماط المعطيات والمعرّفات؛

- العمليات؛
- الحلقات والأفرع؛
- الدخل والخرج؛
- المصفوفات؛
- التوابع والإجرائيات.

a– المصطلحات الخاصة:

تملك اللغات البرمجية معجماً محدداً من الكلمات والمصطلحات الخاصة، ومثال ذلك في لغة Fortran: GO TO و RETURN و END. تقوم هذه الكلمات بإعلام المترجم عن التعليمة المحددة التي يود المستخدم تنفيذها.

b– أنماط المعطيات والمعرّفات:

يشير مصطلح المعرّف إلى وصف عام للمتحولات، والثوابت والتعريفات الأخرى التي قد يقوم المبرمج بوضعها بهدف استخدامها في الإجرائيات والتوابع. يتم إرفاق المتحولات والثوابت دوماً بنمط المعطيات. ففي لغة Fortran مثلاً، يتم إعطاء المتحولات أنماطاً، كعدد صحيح Integer أو عدد كسري Real، ويمكن حجز المساحة اللازمة في الذاكرة لهذه المتحولات.

c– العمليات:

توجد رموز تدعى بالعمليات يتم استخدامها للإشارة إما إلى عملية حسابية، أو إلى علاقة منطقية. وتشابه هذه الرموز تلك المستخدمة في علم الرياضيات.

d–الحلقات والأفرع:

يرمز الفرع إلى نقطة تحويل تقوم بنقل التحكم في البرنامج خارج نطاق التحكم الطبيعي. ففي لغة Fortran ، يتم تنفيذ تعليمة غير شرطية بسيطة بوساطة تعليمة GO TO، ويستخدم التفريع الشرطي تعليمات IF...THEN...ELSE ويتم تنفيذ الانتقال فقط إذا ما تحقق الشرط، وإلاّ يتبع البرنامج التسلسل الطبيعي للتعليمات.

حلقة البرنامج هي سلسلة من التعليمات التي يتم تنفيذها بشكل متكرر مرة بعد مرة، لحين تحقق شرط معين. وتستخدم الحلقات تعليمة Do في لغة Fortran.

e– الدخل والخرج:

عندما يحتاج البرنامج إلى إدخال أو إخراج المعطيات، ينبغي على المبرمج أن يزوده بمعلومات حول:

– أداة الدخل أو الخرج التي ينبغي استخدامها؛

– شكل المعلومات في وسيط الدخل أو الخرج، مثلاً، الطريقة التي ينبغي إخراج المعطيات بها؛

– المتحولات التي ينبغي استخدامها لتخزين المعطيات في الذاكرة بعد إدخالها، أو قبل إخراجها.

لوحة المفاتيح هي الوسيط الافتراضي المستخدم في إدخال المعطيات، إلا إذا قام المبرمج بتعريف وسيط آخر. أما الوسيط الافتراضي لإخراج المعطيات، فغالباً ما يكون شاشة الحاسب ما لم يقوم المبرمج بتعريف وسيط آخر.

f– المصفوفات Arrays:

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من المتحولات التي تمتلك جميعاً المعرّف نفسه. يدعى كل متحول في المصفوفة بعنصر المصفوفة، ويتميز عن بقية العناصر الأخرى بوساطة رقم أو أكثر. وتدعى هذه الأرقام بأدلة ذلك العنصر. تزود الأدلة المبرمج بوسيلة للإشارة إلى العناصر، كل على حدة.

g– مزايا استخدام المصفوفات:

– تسمح المصفوفات بتنفيذ التعليمة نفسها على عدد من المتحولات المختلفة باستخدام الاسم نفسه، ولكن بأدلة مختلفة؛

– في بعض اللغات يمكن معاملة كامل المصفوفة بوصفها متحولاً واحداً؛

– يمكن استخدام المصفوفات لتخزين الجداول، والقوائم، وغير ذلك.

h– التوابع والإجرائيات:

الإجرائية هي عبارة عن سلسلة من التعليمات التي تعدّ جزءاً من البرنامج ككل، على أنها تكون مستقلة عن السلسلة الرئيسة لتعليمات البرنامج التي يتم تنفيذها. لا تشكل الإجرائية بحد ذاتها برنامجاً مستقلاً، ويتم استدعاؤها بوساطة البرنامج الرئيسي حين الحاجة اليها فقط. يتم تنفيذ تعليمات الإجرائية حين استدعائها، ولدى انتهاء التنفيذ، يتم إرجاع التحكم إلى البرنامج الأساسي.

أما التابع فهو عبارة عن سلسلة من التعليمات التي يستخدمها البرنامج للتعبير عن قيمة ما. وهناك نوعان رئيسيان من التوابع:

1. التوابع القياسية: وهي توابع داخلية مدمجة، متوافرة دوماً لمستخدمي اللغة البرمجية. مثال ذلك، تابع إيجاد الجذر التربيعي ، جيب زاوية ..

2. التوابع التي يقوم المبرمج بتعريفها: وهي التوابع التي يكتبها المبرمج.

مزايا التوابع والإجرائيات:

– تتيح تنفيذ العملية نفسها مرات عديدة في أماكن مختلفة من البرنامج من دون الحاجة لتكرار التعليمات.

– تتيح تنفيذ العملية نفسها مرات عديدة في أماكن مختلفة من البرنامج حتى ولو اختلفت تسميات المتحولات.

– تتيح تنفيذ العملية نفسها في برنامج مختلفة، أو أجزاء برمجية متفرقة، وخاصة إذا تم حفظ الإجرائيات ضمن مكتبة برمجية، تكون متوافرة للاستخدام من قبل البرامج التي تتم كتابها.

6 ـ لغة الفورتران

الفورتران (Fortran) هي لغة برمجة، تتكون الكلمة من اختصار لكلمتين في الإنجليزية معناها ترجمة المعادلات(FORmula TRANslation). في عام 1954 خرج جون باكوس John Backus مع مجموعة من شركة IBM بلغة الفورتران، وكانت أولي لغات البرمجة ذوات المستوى العالي وتستخدم أساسا في التحليلات العددية وفي الحوسبة العلمية. وتتميز هذه اللغة بالبساطة والإيجاز ولقد

ظهرت العديد من صور تلك اللغة، آخرها Fortran 2003. تحتوي آخر إصدارات للغة الفورتران على مجموعة من الأوامر التي تفسر نفسها بنفسها مثل أقرأ READ واكتب WRITE واذهب إلى GO TO وتوقف STOP وتنفذ برامج الفورتران تبعا لتسلسل الجمل بها.

1.6-أبجدية لغة الفورتران:

تصاغ الجمل والعبارات في لغة الفورتران وفق قواعد محددة، تشكل الأحرف العناصر الرئيسية للكلمات، كما يتم استخدام الأرقام. تتألف أبجدية لغة الفورتران من الأقسام التالية:

الأرقام العشرية:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الحروف الأبجدية :تتكون حروف الفورتران من الحروف الإنجليزية **الكبيرة:**
A,B,C,……X,Y,Z

بالإضافة إلى الحروف الأبجدية الإنجليزية الصغيرة: **a,b,c,d,….y,z**

رموز خاصة:

+	-	*	**	/	'	:
الجمع	الطرح	الضرب	الرفع إلى قوة	القسمة	فاصلة علوية	نقطتا التفسير

$		.	(	)	,	=
رمز الدولار	فراغ	فاصلة عشرية	قوس أيسر	قوس أيمن	فاصلة	يساوي

2.6- المعطيات في لغة الفورتران:

لابد من تزويد الحاسوب بمعطيات للحصول على نتائج محسوبة. تأخذ المعطيات أشكالاً محددة كأن تكون أعداداً صحيحة أو حقيقية وذلك حتى يتمكن الحاسوب من حجز المكان المناسب لها في الذاكرة.

3.6- الثوابت في لغة الفورتران:

الثوابت في لغة الفورتران أربعة أقسام:

1- الثوابت العددية 2- الثوابت المنطقية 3- الثوابت العقدية 4- الثوابت المحرفية

الثوابت العددية:

هي أعداد رقمية، يكتب العدد في لغة الفورتران على شكل سلسلة من الأرقام الحسابية من 0 حتى 9. كل عدد يمكن أن يحتوي على فاصلة عشرية، كما يمكن أن يحمل الإشارة السالبة أو الموجبة. وهناك أ نواع من الثوابت العددية في لغة الفورتران مثل ثوابت الأعداد الصحيحة، وثوابت الأعداد الحقيقية وثوابت الأعداد العقدية.

ثوابت الأعداد الصحيحة Integer:

يتألف من سلسلة من الأرقام مسبوقة بإشارة + أو - .

ثوابت الأعداد الحقيقية:

يتألف من سلسلة من الأرقام تحتوي على الفاصلة العشرية ويمثل بشكلين:

الثوابت الحقيقية ذات الفاصلة العشرية الثابتة:

وهذا النوع من الثوابت العددية لا يحوي فاصلة عشرية، و يمثل الأعداد الصحيحة، ويكتب بدون فاصلة عشرية حيث أنه يخلو من الكسر العشري، ويمثل بعدد مسبوق بإشارة سالب أو موجب.

الثوابت الحقيقية ذات الفاصلة العشرية العائمة:

وتشمل هذه المجموعة من الثوابت الأعداد الحقيقية والكسرية، وتكتب باستخدام الفاصلة العشرية،

كما يمكن تمثيل الثوابت العددية باستخدام التدوين الأسي، وبشكل خاص، حين تكون هذه الثوابت كبيرة جداً أو صغيرة جداً

يمكن تمثيل الثابت العددي الحقيقي 0.000435 بـ 4.35E-04 والتي تعني أن العدد الموجود إلى يسار الحرف E مضروب في 10^{-4}، والعدد الموجود إلى يمين E يدل على الرفع إلى القوة (الأس) التي يرفع إليها العدد 10.

والشكل العام الذي يمثل هذا النوع من التدوين هو:

$$\pm X\,\boldsymbol{E} \pm m = \pm X \times 10^{\pm m}$$

حيث X عدد حقيقي أو صحيح في لغة الفورتران و m عدد صحيح لا يتجاوز منزلتين إضافة إلى الإشارة. كذلك يمكن أن يأخذ الشكل:

$\pm X\,\mathrm{D} \pm m = \pm X \times 10^{\pm m}$ D يدل على الرفع إلى القوة (الأس) في حالة استخدام الدقة المضاعفة

الثوابت المنطقية Logical :

وهي ثوابت يمكن تحديدها بإحدى القيمتين : قيمة صحيحة أو قيمة خاطئة.

الثوابت العقدية Complex:

يتكون الثابت العقدي من جزأين، يسمى أحدهما الجزء الحقيقي، والآخر الجزء التخيلي. ويكتب عادة بين قوسين ويفصل بين جزئيه بفاصلة،

$25.3 + i\,5.2$ ويعبر عنه بالشكل (25.3,5.2) حيث $i = \sqrt{-1}$

الثوابت الرمزية :

تتكون هذه الثوابت من سلسلة أو عدد من المحارف، وتستخدم عادة في كتابة العناوين أو تمييز بعض نتائج البرامج. وتكتب بين حاصرتين علويتين وهذا النوع من الثوابت غير عددي أي لا يخضع للعمليات الحسابية.

4.6- المتحولات في لغة الفورتران:

تميز لغة الفورتران بين نوعين من المتحولات البسيطة والحقلية، ويمتلك المتحول البسيط في لحظة معالجة البرنامج قيمة وحيدة ويتم استدعاءه باسمه، وأما

المتحولات الحقلية فتتألف من عدة عناصر يستطيع المرء الولوج إلى قيم المتحول عبر اسم الحقل، مضافاً إليه دليل محدد.

التصريح عن المتحولات:

يبدأ اسم المتحول بلغة الفورتران دوماً بحرف من الحروف الانكليزية الست وعشرين، ويمكن أن يتضمن اسم المتحول أرقاما لكن لا يسمح أن يكون اسم المتحول من الأسماء المستخدمة لتعريف التوابع ضمن لغة الفورتران مثل sqrt ,وغيرها. هناك نوعان من المتحولات في لغة الفورتران هما:

المتحولات العددية و المتحولات المحرفية.

يوجد ثلاثة أنواع من المتحولات العددية:

a–المتحولات الصحيحة Integer variables:

وهي المتحولات التي تستخدم لتخزين الثوابت العددية الصحيحة في وحدة الذاكرة ويعتبر برنامج الفورتران أي متحول يبدأ بأحد الأحرف التالية I , J , K , L , M , N متحولاً صحيحاً من دون تصريح عنها(تصريح قياسي) . كما يمكن للمبرمج أن يصرح بغير ذلك في بداية البرنامج كأن يكتب (تصريح صريح):

integer za أي المتحول za صحيح

b–المتحولات الحقيقية Real variables:

وهي المتحولات التي تستخدم لخزن الأعداد الحقيقية المحتوية على كسور عشرية في الذاكرة. يجب أن يبدأ اسم المتحول الحقيقي بحرف أبجدي يختلف عن الحروف الستة I , J , K , L , M , N من دون تصريح عنها(تصريح قياسي) .ويمكن أن يتكون اسم المتحول الحقيقي من حروف أبجدية وأرقام، على أن يبدأ دوماً بحرف، كما يمكن للمبرمج أن يصرح بغير ذلك في بداية البرنامج كأن يكتب(تصريح صريح):

Real i2,za أي المتحولين i2,za حقيقيين

c-المتحولات العقدية Complex variables:

هي المتحولات التي تستخدم لخزن الأعداد العقدية المحتوية. يجب أن يصرح عن المتحولات العقدية كما في المثال الآتي:

Complex za,zb,sa

d-المتحولات المنطقية Logical variables:

هي متحولات تأخذ قيمها إحدى قيمتي الحقيقة "False" أو "True" ويصرح عنها كما يلي:

Logical v1,v2,v3

e-المتحولات المحرفية String variables:

هي متحولات تأخذ قيمها سلاسل رموز ويصرح عنها بالشكل:

Character kw*10, sw*15 أي المتحولان kw, sw هما من نوع سلاسل رموز طول الأول عشرة رموز والثاني خمسة عشر رمزاً.

f-المتحولات Field variables:

يمكن أن تكون المتحولات في لغة الفورتران ببعد واحد أو عدة أبعاد، وتكون جميع متحولات الحقل من نوع المعطيات نفسه، ويمكن التصريح عن نوع متحول الحقل بطريقتين :

الأولى: باستخدام التصريح عن نوع المتحولات الحقلية

Real ver(8) أي المتحول ver حقيقي وله ثمانية عناصر.

الثانية: باستخدام التصريح Dimension

Dimension Mat(16) أي المتحول Mat له ستة عشر عنصراً.

5.6-الإسناد:

إن عمليات وضع قيمة ما في الذاكرة هي عملية إسناد قيمة لمتحول باسمه x=12.5 أسندْ للمتحول x القيمة الحقيقية 12.5

وقد تكون عملية الاسناد أكثر تعقيداً بأن يسند للمتحول عبارة رياضية، sum=x/10.2+3.14

تعبير حسابي = متحول

وهذا يعني إيجاد التعبير الحسابي في الجانب الأيمن، ومن ثم تخزن النتيجة بوصفها قيمة جديدة في الجانب الأيسر.

$z = 25.6 - x$ هذا التعبير الحسابي يعني طرح القيمة المخزنة في المتحول x من العدد 25.6 وتخزين النتيجة بوصفها قيمة في المتحول z.

6.6-التعبير الحسابي:

في لغة الفورتران، كما في الجبر، نستطيع أن نشكل من الثوابت والمتغيرات العددية عمليات حسابية باستخدام رموز العمليات الحسابية الآتية

المؤثر المستخدم	المعنى
**	الرفع إلى قوة
/	القسمة
*	الضرب
+	الجمع
−	الطرح

تستخدم الأقواس في عمليات التجميع في عبارات الفورتران، ولا تشير الأقواس لأي عمل حسابي. ويجب التأكد دوماً من أن عدد الأقواس المفتوحة يساوي عدد الأقواس المغلقة. وعند تنفيذ عبارة حسابية تكون الأفضلية للعمليات بين الأقواس ومن ثم للرفع إلى أس ثم القسمة والضرب ثم الجمع والطرح.

مثال:

128/(5+11)**(1+2)

يوجد هنا قوسان من المستوى نفسه وثم كلا القوسين يتم معالجتهما من اليسار لليمين. تجمع (5+11) فيعطي 16 و(2+1) تعطي 3 . يتم رفع ال 16 للأس 17 أي (3**16) فيكون الجواب 4096 . وأخيراً 128/4096 فيكون الناتج 3.125E-02.

7.6–التعبير المنطقي:

تستخدم المؤثرات العلائقية التالية في لغة الفورتران:

المؤثر المستخدم	المعنى
.EQ.	يساوي
.NE.	لا يساوي
.GT.	أكبر من
.GE.	أكبر أو يساوي
.LT.	أصغر من
.LE.	أصغر أو يساوي
.OR.	أو
.AND.	و
.NOT.	نفي

مثال:

إذا x>y ، عندها تكون نتيجة (x.GT.y) هي true ، و (x.EQ.y) هي False.

إذا $((B^2-4*A*C).GE0)$ ، نتيجتها هي true ، عندما $(B^2-4AC>=0)$ و False عندما $(B^2-4AC<0)$.

8.6–التوابع الرياضية في لغة الفورتران:

يوجد في لغة الفورتران مكتبة من التوابع الرياضية يمكن استخدامها مباشرة عندها تكون جاهزة . يبين الجدول الآتي بعضاً من هذه التوابع :

التابع	صيغته الرياضية	المتحول x	صيغته بلغة الفورتران
الجذر التربيعي	$\sqrt{x}$	حقيقي	$\mathbf{SQRT}(x)$

القيمة المطلقة	$\|x\|$	حقيقي	$ABS(x)$
أس اللوغاريتم الطبيعي المرفوع الى قوة	e^x	حقيقي	$\mathrm{EXP}(x)$
اللوغاريتم العشري	$\log(x)$	حقيقي	$\mathrm{ALOG10}(x)$
اللوغاريتم الطبيعي	$\ln(x)$	حقيقي	$\mathrm{ALOG}(x)$
جيب الزاوية	$\sin(x)$	حقيقي (راديان)	$\mathrm{SIN}(x)$
جيب تمام الزاوية	$\cos(x)$	حقيقي (راديان)	$\mathrm{COS}(x)$
ظل الزاوية	$\tan(x)$	حقيقي (راديان)	$TAN(x)$
ظل تمام الزاوية	$\cot(x)$	حقيقي (راديان) لايساوي 0	$COTAN(x)$
ظل الزاوية المعكوس	$\tan^{-1}(x)$	حقيقي (راديان)	$ATAN(x)$
جيب الزاوية القطعي	$\sinh(x)$	حقيقي (راديان)	$\mathrm{SINH}(x)$
جيب تمام الزاوية القطعي	$\cosh(x)$	حقيقي (راديان)	$COSH(x)$
ظل الزاوية القطعي	$\tanh(x)$	حقيقي (راديان)	$TANH(x)$

9.6–تعليمات الاخراج والادخال :

يمكن للمبرمج بلغة الفورتران التحكم بشكل إخراج وطباعة المعلومات على وحدة الإخراج (شاشة–طابعة – ملف)، يتم استخدام تعبيرين لهذا الغرض هما:

```
Write(L,M)
Format(field,field,..)        | M
```

يأخذ L قيمة عددية تشير إلى وحدة الإخراج * أو 6 تعني الإخراج إلى الشاشة، وإذا وضع رقم آخر فلا بد من تعريف وحدة الإخراج (ملف..).

M يشير لرقم أمر الصيغة الذي يتم استخدامه لشكل المتحول فإذا وضعت قيمته * عندها سيستخدم برنامج الفورتران الشكل القياسي للمتحول أو بحسب التصريح.

في أمر الصيغة Format يتم التعبير عن field بأحد الأشكال التالية:

K Iw.n: تشير I إلى أن الإخراج للقيمة من نوع صحيح وأما w فتشير إلى العرض الكلي للحقل ، وتشير n إلى أصغر عدد خانات التي يمكن بها إخراج العدد الصحيح، وتشير k لعدد مرات تكرار الإخراج بهذه الصيغة(عدد المتحولات).

K Fw.d: تشير F إلى أن الإخراج للقيمة من نوع حقيقي وأما w فتشير إلى العرض الكلي للحقل ، وتشير d إلى أصغر عدد الخانات المخصصة للجزء الكسري ، وتشير k لعدد مرات تكرار الإخراج بهذه الصيغة(عدد المتحولات).

K Ew.d: تشير E إلى أن الإخراج للقيمة من نوع حقيقي بصيغة الفاصلة العائمة وأما w فتشير إلى العرض الكلي للحقل ، وتشير d إلى عدد الخانات المخصصة للجزء الكسري ، وتشير k لعدد مرات تكرار الإخراج بهذه الصيغة(عدد المتحولات).

مثال:

```
A=2350056.332
m=220
C=6.02E+23
Write(6,1)A,m,C
```

```
1 | Format(5x,f13.3,I6,E14.3)
```

ويكون الاخراج

2350056.332 220 .60200000E+24

الادخال: تتم عملية الادخال باستخدام الأمر read

```
Read(L,M)
M Format(field,field,..)
```

يأخذ L قيمة عددية تشير إلى وحدة الادخال * أو 5 تعني الادخال باستخدام لوحة المفاتيح، وإذا وضع رقم آخر فلا بد من تعريف وحدة الادخال **(ملف..)**.
M يشير الى الرقم أمر الصيغة الذي يتم استخدامه لشكل المتحول فإذا وضعت قيمته * عندها سيأخذ برنامج الفورتران الشكل القياسي للمتحول أو بحسب التصريح. أما في أمر الصيغة Format يتم التعبير عن **field** بأحد الأشكال التي سبق ذكرها.

مثال: ليكن لدينا العددان A=2350056.332 ,C=6.02E+23

```
  | Read(5,1)A,C
1 | Format("A=",F16.6,"C=",E14.8)
```

الإدخال من لوحة المفاتيح بالشكل:

002350056.332000000.60200000E+24

10.6–القفز في لغة الفورتران:

تساعد هذه الأوامر على قطع التسلسل الطبيعي لا جراء العمليات على الحاسب الالكتروني، كما وتحدد الأمر الذي يجب أن تتم متابعة الأوامر اعتباراً منه.

هناك نوعان من أوامر القفز

- أوامر القفز غير المشروط– من بدون قيد أو شرط
- أوامر القفز المشروط

a–أوامر القفز غير المشروط

1.a–تعليمة القفز الحتمي:

تجبر هذه التعليمة *Goto n* (اذهب إلى) البرنامج على الانتقال لتنفيذ التعليمة n التي يشير إليها الأمر Goto n حيث ينتقل البرنامج إلى السطر الذي يحمل الرقم n.

```
      INTEGER SUM
      READ(*,*) N
      ICOUNT = 1
      SUM = 0
10    SUM = SUM * ICOUNT
      ICOUNT = ICOUNT + 1
      IF(ICOUNT .LE. N) GO TO 10
      WRITE(*,*) N, SUM
      STOP
```

END

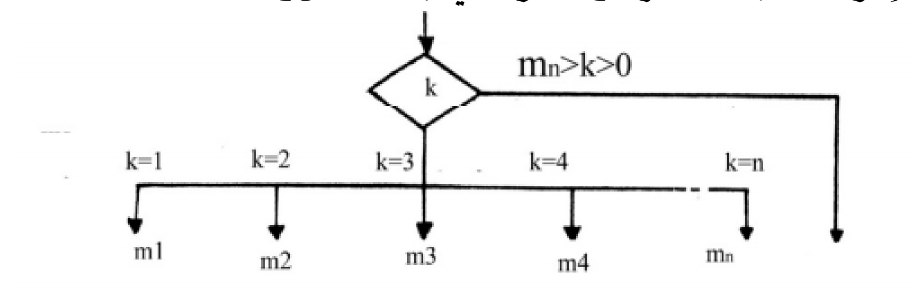
2.a–تعليمة القفز المحسوب:

تكتب الصيغة العامة لهذا الأمر بالشكل $Goto(m_1, m_2, m_3,...., m_n)\ k$ حيث

$Goto$ مفهوم الأمر الذي تعني اذهب إلى وحيث $m_1, m_2, m_3,...., m_n$ لائحة عناوين و k سم متحول عددي من النوع الصحيح.

وعندما تكون لائحة العناوين مؤلفة من عنوان وحيد، فإن كتابة اسم المتحول(k) واستعمال الأقواس في صيغة أمر القفزة غير المشروطة تهمل وتصبح:

$Goto\ m$ فإذا التقى الحاسب بهذا الأمر فإن تسلسل الأوامر سينقطع ويتابع الحاسب إجراء العمليات اعتباراً من الأمر الذي يحمل العنوان **m.**



تمثيل تعليمة القفز المحسوب

b–أوامر القفز المشروطة:

يحدد إمكانية متابعة البرنامج من احتمالين أو ثلاثة احتمالات وذلك اعتباراً من لحظة زمنية ما.

1.b–أوامر القفز المشروطة العددية:

الصيغة العامة لكتابة هذه الأوامر هي الآتية:

IF(e)m1,m2,m3

IF أمر القفزة المشروطة، e علاقة حسابية، m1,m2,m3 ثلاثة عناوين.

يتم تنفيذ أمر القفزة المشروطة العددية بالشكل الآتي:

1–تحسب قيمة العلاقة الحسابية e، أي أن قيمة المتحولات التي تدخل في هذه العلاقة يجب أن تكون معروفة.

2–إذا كانت e<0 يقفز البرنامج إلى m1.

3–إذا كانت e=0 يقفز البرنامج إلى m2.

4– إذا كانت e>0 يقفز البرنامج إلىm3 .

2.b–أوامر القفز المشروطة المنطقية:

الصيغة العامة لكتابة هذه الأوامر

IF(e)©

حيث e هنا علاقة منطقية ما ويمثل © أمراً نشيطاً، ويتم تنفيذ الأمر إذا كانت نتيجة العلاقة e هي True.

مثال: اكتب برنامجاً لحساب قيمة التابع :

$$f(x) = Ln(\sqrt{x^2+1})$$

وذلك من أجل $10 \geq x \geq 0$ وبخطوة تساوي 0.05 في المجال [1،0] وبخطوة 0.1 في المجال [10،1] ويقوم البرنامج بطباعة x وقيمة f(x).

الحل:

```
      R=1.0
      X=0.0
3     DELTAX=0.05
      IF(X-R)1,2,2
1     F=ALOG(SQRT(X**2+1.0))
      WRITE(*,*) X,F
      X=X+DELTAX
      GO TO 3
```

```
2   IF(X-10.0)4,5,5
4   DELTAX=0.1
    X=X+DELTAX
    F=ALOG(SQRT(X**2+1.0))
    GO TO 3
5   STOP
    END
```

جملة IF الشرطية:

الصيغة العامة الثانية لجملة الاختيار IF–THEN–ELSE هي

```
IF (condition) THEN
Statement 1
        .
        .
Statement N
ELSE
Statement 1
        .
        .
Statement M
END IF
```

حيث:

IF كلمة محجوزة.

Condition	تعبير قيمته صواب أو خطأ.
THEN	كلمة محجوزة، وينبغي أن تكون في نهاية السطر.
Statement1	جملة من جمل الفورتران.
ELSE	كلمة محجوزة، وينبغي أن تكون منفردة في السطر، وهذه الكلمة تعني نهاية الجمل التي ستنفذ في حالة صواب التعبير المنطقي، وتشير إلى بداية الجمل التي ستنفذ في حالة خطأ التعبير المنطقي، وهذه الكلمة والجمل التي بعدها تعتبر اختيارية أي يمكن إهمالها في حالة عدم الحاجة إليها.
END IF	كلمة محجوزة، يجب أن تكون في نهاية هذه الصيغة من جملة الشرط

ويمكن التحقّق من أكثر من شرط، فإذا لم يتحقّق أيّ منها يقفز البرنامج لتنفيذ مقطع "ما عدا ذلك" Else، وذلك تبعا للصيغة الآلية:

IF (condition1) THEN Statement 1	(وهو ينفّذ في حالة تحقّق شرط1)
ElseIF (condition2) THEN Statement 2	(وهو ينفّذ في حالة تحقّق شرط2)
ElseIF (condition3) THEN Statement 3	(وهو ينفّذ في حالة تحقّق شرط3)
Else Statement 4	(وهو ينفّذ في حالة عدم تحقّق أيّ شرط)
End If	

لا حدود في إضافة العدد الذي تريده من جمل ElseIf .

11.6-أوامر الحلقات:

إن وجود عدد من الأوامر التي تتكرر أكثر من مرة متتالية في عدد كبير من البرامج والتي يعتمد تكرارها على عدد ما من الأوامر أدى إلى إدخال أوامر خاصة تسمى أوامر الحلقات.

الشكل العام لصيغة أوامر الحلقات

Do m i=n1,n2,n3

حيث : Do تعني نفذ

m عنوان آخر أمر من الحلقة

i عداد العمليات المتكررة

n1 القيمة الابتدائية للعداد

n2 القيمة النهائية للعداد

n3 خطوة العداد

وفي حال لم تكتب n3 فهذا يعني أن قيمتها تساوي الواحد.

التقسيم إلى توابع:

عندما تصبح البرامج أكبر لا تعود لائحة واحدة من التعليمات فعالة جداً، حيث ويكون من الأجدى تقسيم البرنامج إلى أجزاء صغيرة تدعى التوابع FUNCTION أو برامج جزئية SUBROUTINE. إن تقسيم البرنامج إلى توابع وبرامج جزئية هو أحد ركائز لغات البرمجة الإجرائية.

6. 12-التوابع:

تدعم لغة الفورتران ثلاثة أنواع من التوابع هي:

1-التوابع المتوفرة داخل برنامج الفورتران، والتي سبق وشرحناها.

2-عبارات التوابع الرياضية: وتأخذ الصيغة التالية:

الصيغة =(اسماء المتحولات)NAME

F(X,Y)=X**2+3*X*Y

3–تابع البرنامج الجزئي: يكتب بوصفه برامجاً متكاملاً، ويجب أن يحوي عند نهايته الأمرين RETURN, END

ويكتب بداية (FUNCTION NAME(VARIABLES

حيث NAME هو الاسم المعطى لهذا البرنامج و VARIABLES مجموعة من المتحولات تفصل بفاصلة بينها.

```
FUNCTION name ( argument-list )

...

(Declaration section must declare type of
name) ...

(Execution section) ...

name = expr

RETURN

END FUNCTION [name]
```

6–13–البرامج الجزئية:

بما ان التوابع تعيد فقط قيمة واحدة لذا فإن وجود البرامج الجزئية سهلً التعامل مع برنامج الفورتران. يكتب البرنامج الجزئي كأي برنامج إلا انه يبدأ بعبارة: SUBROUTINE NAME(VARIABLES)

ويجب أن يحوي عند نهايته الأمرين RETURN, END.

ويتم استدعاؤه من البرنامج الرئيسي بالأمر CALL

CALL NAME(VARIBLES)

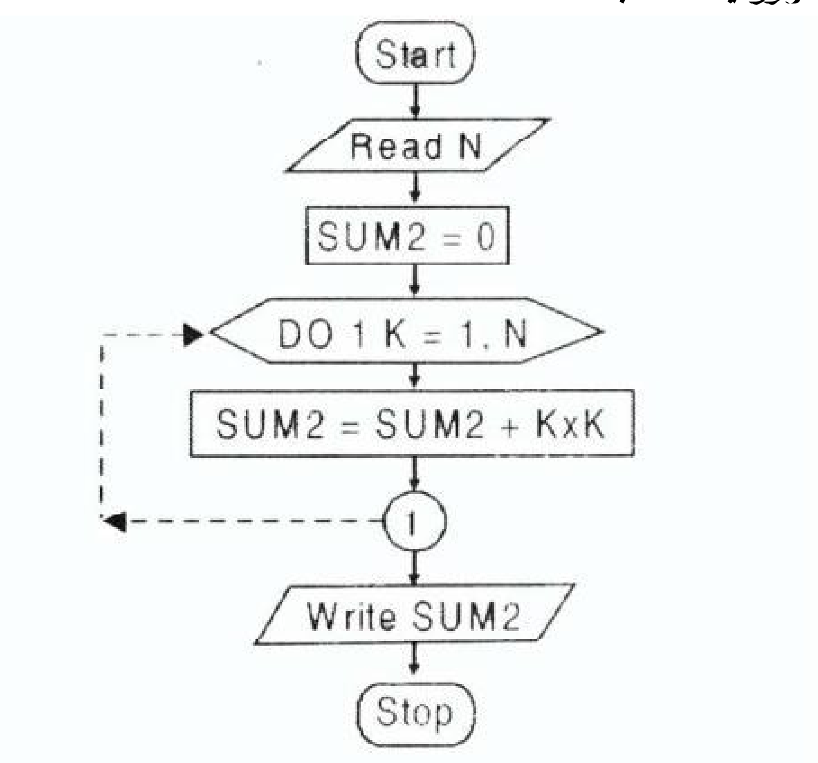
أمثلة:

مثال 1: اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لحساب مربع N من الأعداد الطبيعية.

البرنامج:

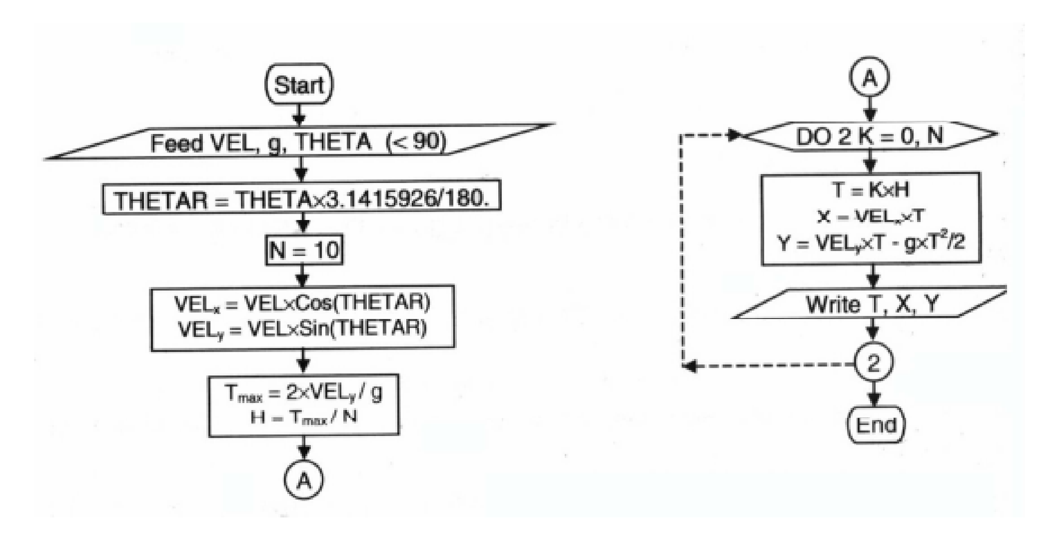
```
      INTEGER SUM2
      WRITE(*,*) ' FEED NO. OF TERMS, N'
      READ(*,*) N
      SUM2 = 0
      DO 1 K = 1, N
      SUM2 = SUM2 + K ** 2
    1 CONTINUE
      WRITE (*,*)' SUM OF SQUARED NUMBERS= ' ,SUM2
      STOP
      END
```

خوارزمية الحساب



مثال 2:اكتب برنامجاً لإيجاد تردد قيمة معيّنة في مجموعة معطاة من القيم.

خوارزمية الحل:

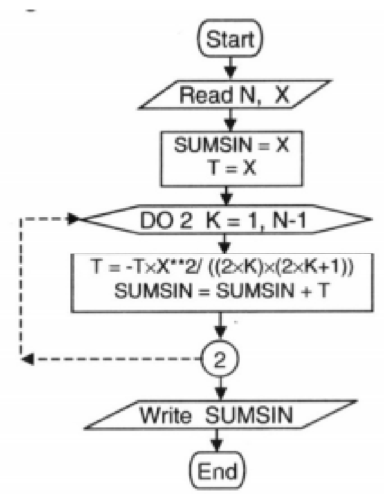


البرنامج:

```
      DIMENSION XDATA(100)
      INTEGER FREQ(10)
      WRITE(*,*)'FEED NO . OF STUDENTS,N< = 100'
      READ(*,*)N
      WRITE(*,*) 'FEED MARKS IN THE RANGE[0,99] '
      READ(*,*) (XDATA(I), I = 1, N)
      DO 20 I = 1, 10
      FREQ(I) = 0
   20 CONTINUE
      K=INT(xdata(I)/10)+1
      FREQ(K) = FREQ(K) + 1
   30 CONTINUE
      WRITE(*,*)' FREQUENCY DISTRIBUTION TABLE'
      WRITE(*,*)' ----------------------------'
      WRITE(*,*)' INTERVAL FREQUENCY'
      WRITE (*,*)'----------------------------'
      DO 60 K= 1, 10
      K1 = (K-1)*10
      K2=K*10-1
      WRITE(*, *)K1,' - ',K2, ' ',FREQ(K)
   60 CONTINUE
      WRITE(*,*)'----------------------------'
      STOP
      END
```

مثال 3: اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لإيجاد قيمة منشور تايلور لتابع الجيب حتى عدد معين من الحدود، علماً أن منشور تايلور لتابع الجيب يعطى بالعلاقة:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



خوارزمية الحل

البرنامج:

```
  WRITE(*,*)  ' FEED X IN RADIAN '
  READ(*,*)X
  WRITE(*,*)  'X=',X
  WRITE(*,*)  ' FEED NUMBER OF TERMS, N'
  READ(*,*)N
  WRITE(*,*)  ' NUMBER OF TERMS = ', N
  SUMSIN = X
  T=X
  DO 2 K=1,N-1
  T=-T*X**2/((2.0*K)*(2.0*K+1))
  SUMSIN = SUMSIN + T
2 CONTINUE
  WRITE(*,*)  ' SUM OF SINE SERIES = ', SUMSIN
  WRITE(*,*)'ACTUAL VALUE=',SIN(X)
  STOP
  END
```

مثال 4: اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لحل معادلة من الدرجة الثانية.

```
REAL A,B,C,ROOT1,ROOT2,AIMAG
WRITE(*,*)'FEED COEFFICIENTS A, B AND c '
READ(*,*)A, B, C
WRITE(*,*)'THE COEFFICIENTS A, B AND c ARE:'
WRITE(*,*)A, B, C
WRITE(*,*)'------------------------------------'
CALL  QUAD(A,B,C,ROOT1,ROOT2,AIMAG)
WRITE(*,*) 'REAL PART OF ROOTS ARE '
WRITE(*,*) ROOT1,ROOT2
WRITE(*,*)'                                    '
WRITE (*,*)' IMAGINARY PART ='
WRITE(*,*)'  IF=0 THEN THE ROOTS ARE REAL'
WRITE(*,*) '    +,-',AIMAG
WRITE(*,*)'------------------------------------'
STOP
END
```

```
SUBROUTINE QUAD(A,B,C,ROOT1,ROOT2,AIMAG)
REAL A,B,C,ROOT1,ROOT2,AIMAG
DISC = B*B - 4*A*C
IF (DISC.GT.0) THEN
ROOT1 = (-B + SQRT(DISC) )/(2 *A)
ROOT2 = (-B - SQRT(DISC))/(2*A)
ELSE IF(DISC .EQ. 0) THEN
ROOT1 = -B/(2 * A)
ROOT2=ROOT1
ELSE
ROOT1 = -B/(2 * A)
ROOT2=ROOT1
AIMAG = SQRT(-DISC)/(2*A)
ENDIF
RETURN
END
```

تمارين:

1–اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لحساب الحل العام لمعادلة من الدرجة الثانية.

2–اكتب برنامجاً لحساب قيم التابع

$$y(x) = \begin{array}{ll} 0.5x & 0 \longleftarrow x < 4 \\ 2+\sqrt{4}-(x+6)^2 & 4 \longleftarrow x < 8 \\ 6-0.5x & 8 \longleftarrow x \longleftarrow 12 \end{array}$$

3–اكتب برنامجاً يقوم بحساب المتوسط الحسابي لـ 20 رقماً .

الفصل الثالث

التكامل العددي ودراسة نموذج مونت كارلو

1 ـ مقدمة:

سوف نناقش في هذا الفصل بعض الطرق الكلاسيكية للتعامل مع التكامل العددي، مثل قاعدة شبه المنحرف وسيبمسون .

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3-1}$$

لدينا التكامل الموضّح في الشكل (1) الذي يمثلاً تكامل محدوداً على المجال [a,b] . هناك عدة طرق للتعامل مع التكامل سندرس منها الآتي.

2 ـ صيغ التكامل البدائية:

الفكرة الأساسية تقوم على بناء تابع ليغبر عن مواضع محددة، واستخدام قيم هذه التوابع للوصول الى قيمة التكامل الكامل بشكل تقريبي. ونسعى الى صيغة التربيع الموضحة في الشكل:

$$I \approx \sum_{i=0}^{N} W_i\, f_i, \tag{3-2}$$

حيث x_i مجموعة نقاط مختارة من مجال الدراسة (قسمنا مجال الدراسة الى $N+1$ نقطه أي من $N+1$,,,,,,,,,,,,, $i=0$)، $f_i=f(x_i)$ ، W_i وزن النقطة i. لتبسيط الدراسة سوف نفترض اننا قسمنا مجال الدراسة الى مجالات جزئية متعاقبة ومتساوية h. ولنفترض في البداية انه لدينا مجال جزئي محدود، وبعد ذالك نحاول التطوير لنصل إلى الحالة الأشمل. ابسط شكل يمكن أن نعبر عنه في حالة $N=1$. ومن ثم يصبح التكامل على الشكل :

$$I \approx W_0\, f_0 + W_1\, f_1, \tag{3-3}$$

حيث $x_0=a$ و $x_1=b$ ، تكامل محدود. ولنعتبر ان التابع $f(x)=1$ و $f(x)=x$ حيث إننا أخذنا أول حدين من منشور تايلور.

في البداية من اجل $f(x)=1$ سنجد ان التكامل سيصبح على الشكل:

$$\int_{x_0}^{x_1} 1\,dx = x_1 - x_0 = W_0 + W_1, \tag{3-4}$$

و من اجل $f(x)=x$ سيصبح التكامل على الشكل:

$$\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{{x_1}^2 - {x_0}^2}{2} = W_0x_0 + W_1x_1. \tag{3-5}$$

المطلوب الآن هو حل جملة المعادلتين وإيجاد قيمة كل من W_1 , W_0 ، سنجد إن الحل هو

$$W_0 = W_1 = \frac{x_1 - x_0}{2}. \tag{3-6}$$

ان $h= b - a$ لأننا افترضنا ان $N=1$

أي بإمكاننا الكتابة $\frac{x_1 - x_0}{2} = w_1 = w_0 = \frac{b-a}{2}$

وبالتالي في هذه الحالة يقرب التكامل الى الشكل:

$$W_0 = W_1 = \frac{x_1 - x_0}{2}. \tag{3-6}$$

لإيجاد قيمة التكامل يجب ان نعتمد على تقريب محدد، سنعتمد على تقريب لاغرانج من اجل الحدود المتبقية من منشور تايلور، ليصبح التكامل على الشكل النهائي الآتي:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12}f^{[2]}(\xi), \tag{3-7}$$

حيث ξ مجموعة نقاط من مجال الدراسة.

لكننا لسنا محدودين بالحل من أجل قيمة N=1 . لنفترض الآن أن N=2 ، وفي هذه الحالة سنأخذ أول ثلاثة حدود من منشور تايلور، لتصح المعادلات التي توافق ذلك على الشكل الآتي:

$$\int_{x_0}^{x_2} 1\, dx = x_2 - x_0 = W_0 + W_1 + W_2, \tag{3-8}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} x\, dx = \frac{{x_2}^2 - {x_0}^2}{2} = W_0 x_0 + W_1 x_1 + W_2 x_2,$$

$$\int_{x_0}^{x_2} x^2\, dx = \frac{{x_2}^3 - {x_0}^3}{3} = W_0 x_0^2 + W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2.$$

بالمتابعة والحل سنصل علاقة سيمبسون Simpson's rule وفق الشكل:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{[4]}(\xi). \tag{3-9}$$

بالمتابعة من أجل N=3 أي من أجل أربع نقاط سنحصل على علاقة سيبسون 3/8 وفق الشكل:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{[4]}(\xi), \tag{3-10}$$

بالمتابعة من أجل N=4 أي من أجل خمسة نقاط سنحصل على علاقة بولي Boole's rule وفق الشكل:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{[6]}(\xi). \tag{3-11}$$

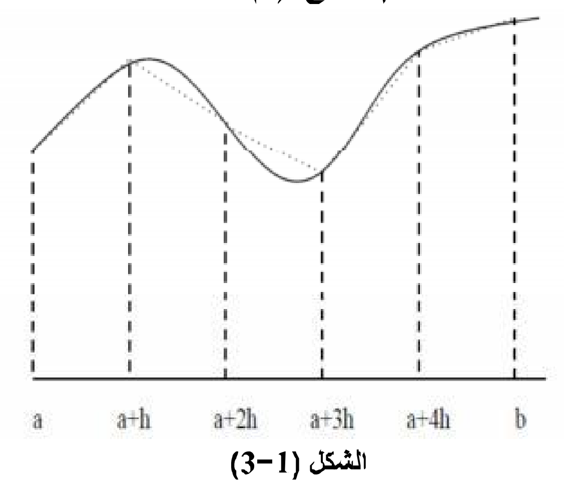
و بالتالي وسنجد ان هذا النموذج فعال من أجل تابع كثير الحدود يتبع Xn ، يمكن اجراء التكامل من اجل قيم ل N صغيرة، وكلما ازدادت قيمة N كلما تعقد الناتج لنصل بالنهاية الى طريق مسدود لا يمكن المتابعة فيه. أي أن هذه الطريقة تصلح من اجل قيمة صغيرة ل N فقط.

3-طريقة نيوتن (الخطوات المتساوية):

في هذه الطريقة نعتمد على تقسيم مجال التكامل إلى مسافات جزئية متساوية، وسنعتمد على منشور تايلور للتابع *f(x)* حول النقطة *x* .

لدراسة أي تكامل، بالاعتماد على هذه الطريقة، نتبع الخطوات التالية:

- اختيـار عـرض مجـال التقسـيم (أي عـرض مجـال المسـافات الجزئيـة المتسـاوية) $h=\frac{b-a}{N}$ حيـث N يمثـل عـدد هـذه المجـالات علـى مجـال التكامل [a,b].
- نوجد منشور تايلور للتابع *f(x)* واختيار مجموعة النقاط بجوار x.
- بهذا التقريب المناسب نوجد قيم التابع *f(x)*.



الشكل (1−3)

يمثل الشكل (1−3) المساحة التي تمثل تكامل التابع *f(x)* على مجال الدراسة بالإضافة الى طريقة التقسيم (المسافة المتساوية) .

بالاعتماد على هذا الشكل بإمكاننا ان نكتب التكامل وفق الحل الآتي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)dx + \dots \int_{b-2h}^{b} f(x)dx. \quad (3\text{-}12)$$

ومن ثم التعبير عن التابع f(x) بمنشور تايلور في مجال الدراسة المحدد.

مثال

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx \quad (3\text{-}13)$$

سنوجد منشور التابع *f(x)* بجوار النقطة xo ويكون وفق الشكل الآتي:

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4). \quad (3\text{-}14)$$

لنأخذ التكامل من العلاقة (3-14)، ونجزأ هذا التكامل إلى تكاملين: الأول من $-h$ الى x_o ، والتكامل الأخر من x_o إلى h. أي جزأنا المجال إلى نقطتين، وأصبح لدينا مجالان للتكامل، ويمكن أن تعدَّ عبارة عن خط مستقيم، أي التكامل، يمثل مساحة شبه منحرف. ولقد أصبح لدينا مجالات جزئية صغيرة جداً، يمكن القول إنه كل مجال صغير يخضع لتابع شبه المنحرف (trapezoid)، وبالتالي يمكن تطبيق علاقة شبه المنحرف (trapezoid rule) أي نجري تقريباً لكثير حدود من الدرجة الأولى للتابع $f(x)$ أي $f(x) = a + bx$. حيث إن العدد الثابت b يمثل الميل إلى هذه العلاقة.

$$f'(x_0 \pm h) = \frac{\mp f(x_0 \pm h) \pm f(x_0)}{h} + O(h). \tag{3-15}$$

وتكون علاقة شبه المنحرف (rule trapezoid) عند هذه النقط على الشكل:

$$f(x) = f_0 + \frac{f_h - f_0}{h} x + O(x^2), \tag{3-16}$$

من أجل $x= x_o$ الى $x=x_o+h$

$$f(x) = f_0 + \frac{f_0 - f_{-h}}{h} x + O(x^2), \tag{3-17}$$

ومن أجل $x= xo$ الى $x=xo-h$ مجال الخطأ هو $O(x2)$ وعند إيجاد الحل سوف نجد ا، التكامل على الشكل الآتي:

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_h + 2f_0 + f_{-h}) + O(h^3), \tag{3-18}$$

التي تعرف بعلاقة شبه المنحرف (trapezoid rule) . بالنسبة للتقريب من اجل حساب الخطأ في الحسابات $O(h^3) = O((b-a)^3 / N^3)$ حيث N تمثل عدد نقاط تقسيم مجال الدراسة، يعني أن الخطأ بشكل عام يساوي $O(h^2)$. بالنهاية، التكامل بشكل عام يصبح على الشكل الآتي:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h(f(a)/2 + f(a+h) + f(a+2h) + \dots\dots\dots + f(b-h) + f(b)/2) \tag{3-19}$$

ولإيجاد التكامل بشكل عام نتبع الخطوات وفق الآتي:

- اختيار عدد خطوات تقسيم مجال التكامل *N*.
- حساب قيمة التابع *f(a)* ، وكذلك *f(b)* وضرب الناتج ب *1/2*.
- تكون الحلقة اعتباراً من *n=1* لغاية *n−1* حساب باقي حدود الحلقة التي هي

$$f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+......+f(b-h)$$

- إضافة الحدين *f(a)/2* والحد *f(b)/2* إلى العلاقة السابقة وضرب الناتج *h*.

بالنسبة للعمل السابق استخدمنا التقريب الخطي لنقطتين. لنحاول الدراسة من أجل التقريب الخطي لثلاث نقاط. وهذا يعني أننا سوف نختار صيغاً على أساس القيم بشكل متناظر حول النقطة لمنشور تايلور. وسنجري التقريب من الدرجة الثانية $f(x)=a+bx+cx^2$ ، الحد الأول والحد الثاني من الناتج يعطيان الشكل

$$\frac{f_h-f_{-h}}{2h}=f_0'+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_0^{(2j+1)}}{(2j+1)!}h^{2j}. \tag{3-20}$$

$$\frac{f_h-2f_0+f_{-h}}{h^2}=f_0''+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_0^{(2j+2)}}{(2j+2)!}h^{2j} \tag{3-21}$$

في كلا الحالتين الخطأ $O(h^{2j})$. مع العلاقتين الأخيرتين تصبح العلاقة النهائية:

$$f(x)=f_0+\frac{f_h-f_{-h}}{2h}x+\frac{f_h-2f_0+f_{-h}}{2h^2}x^2+O(x^3) \tag{3-22}$$

وإدراج هذه العلاقات في المعادلة (3−3) نحصل على العلاقة:

$$\int_{-h}^{+h}f(x)dx=\frac{h}{3}\left(f_h+4f_0+f_{-h}\right)+O(h^5) \tag{3-23}$$

التي تّعبر عن علاقة سيمبسون (Simpson's rule) ، وبالتالي نكتب العلاقة النهائية على الشكل الآتي:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+....4f(b-h)+f(b)) \quad (3\text{-}24)$$

ومن ثم:

- اختيار عدد خطوات تقسيم مجال التكامل *N*.
- حساب قيمة التابع *f(a)* وكذلك *f(b)*.
- تكون الحلقة اعتباراً من *n=1* لغاية *n−1* حساب باقي حدود الحلقة التي هي $4f(a+h)+2f(a+2h)+....+4f(b-h)$ في كل خطوة نعود للعلاقة $a+nh$ في حالة n عدد فردي نضرب ب 4 وفي حالة أى عدد زوجي نضرب بالعدد 2.
- نوجد مجموع هذه الحدود ونضرب ب *h/3*.

مثال 1 – يمكن ان يكتب برنامج بلغة الفورتران لطريقة 1/3 سيمبسون من اجل n=2 على برنامج فرعي.

FORTRAN Program:

```
C      Simpson's 1/3 Rule
C
       write(*,*)'Lower limit, Upper Limit and Number of
                 sub-intervals'
       read(*,*)a,b,n
       h=(b-a)/n
       x=(a+b)/2
       sum=f(a)+4*f(x)+f(b)
       s=h/3*sum
       write(*,*)'Value of Integral= ', s
       stop
       end
C
C      Subroutine for function
C
       function f(x)
      f=x**2
      return
      end
```

مثال2 : برنامج بلغة الفورتران لطريقة $1/3$ سيمبسون

FORTRAN Program:

```
C     Simpson's 1/3 Rule (Modified)
C
      write(*,*)'Lower limit, Upper Limit and Number of
               sub-intervals'
      read(*,*)a,b,n
      h=(b-a)/n
      sum=f(a)+f(b)
      d=4
      do k=1,n-1
         x=a+k*h
         sum=sum+d*f(x)
         d=6-d
      enddo
      s=h/3*sum
      write(*,*)'Value of Integral= ', s
      stop
      end
C
C     Subroutine for function
C
      function f(x)
      f=x**2
      return
      end
```

توجد طريقة اخرى تدعى $3/8$ علاقة سيمبسون، وتستخدم في حالة كانت n من مضاعفات العدد 3.

- اختيار عدد خطوات تقسيم مجال التكامل *N*.
- حساب قيمة التابع *f(a)* وكذلك *f(b)*.
- تكون الحلقة اعتباراً من *n=1* لغاية *n−1*

$$\left\{ f(x_0)+3\sum_{i=1,4,7...}^{n_2-2} f(x_i)+3\sum_{i=2,5,8...}^{n_2-1} f(x_i)+2\sum_{i=3,6,9,...}^{n_2-3} f(x_i)+f(x_{n_2})\right\}$$

- نوجد مجموع هذه الحدود ونضرب ب *h3/8*.

ليصبح التكامل على الشكل الآتي:

$$I_2=\left(\frac{3h}{8}\right)\left\{ f(x_0)+3\sum_{i=1,4,7..}^{n_2-2} f(x_i)+3\sum_{i=2,5,8...}^{n_2-1} f(x_i)+2\sum_{i=3,6,9,...}^{n_2-3} f(x_i)+f(x_{n_2})\right\}$$

مثال 3: جميع العناصر الالكترونية، وخاصة عناصر off–the–shelf لا تتطابق مع قيمتها الاسمية. وهذا ناتج عن المواد المختلفة او التصنيع وكذلك ظروف التشغيل تؤثر على قيمتها. لنفترض انه قد تم تصميم دارة تطلب إدخال عنصر محدد، وكيف يمكن أن نحدد ان إدخال هذا العنصر سيكون مناسباً لعمل الدارة؟

لحلّ هذه المشكلة لابدّ من تعريف تابع الكثافة لتحديد العنصر المناسب للدارة. لدارة هزاز ليكون ترددها بحدود 5% من القيمة الفعلية (1 kHz) ، ويمكن تحديد ذلك من خلال المساحة الكلية لتابع التوزيع الطبيعي في مجال الدراسة.

$$f(x)=\int_{-2.15}^{2.9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

1– استخدم قاعدة شبه المنحرف لايجاد تردد الهزاز (من أجل n=2).

2– أوجد الخطأ في الحساب.

الحل:

الطلب الأول:

$$(1-\alpha)\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$a=-2.15$$
$$b=2.9$$

لحساب قيمة h/3 سنجد أن

$$\frac{h}{3}=\frac{\frac{b-a}{2}}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(-2.15)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-2.15)^2}{2}}$$

$$=0.039550$$

$$f(2.9)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.9)^2}{2}}$$

$$=0.0059525$$

$$f(0.375)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(0.375)^2}{2}}$$

$$=0.37186$$

$$(1-\alpha)\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\approx\left(\frac{(2.9-(-2.15))}{6}\right)[f(-2.15)+4f(0.37500)+f(2.9)]$$

$$\approx\left(\frac{5.05}{6}\right)[0.039550+4(0.37186)+0.0059525]$$

$$\approx 1.2902$$

الطلب الثاني:

لا يمكن الحصول على القيمة الدقيقة، لذلك يجب حساب الخطأ الحقيقي والخطأ النسبي لنفترض ان القيمة الحقيقية لهذا التكامل باستخدام احد البرامج التطبيقية (ماتلاب ، ماسمتيكا او مابل ...) كانت على الشكل الآتي:

$$(1-\alpha)=\int_{-2.15}^{2.9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=0.98236$$

يمكننا كتابة الخطأ على وفق الآتي:

$$E_t=True\ Value-Approximate\ Value$$

$$=0.98236-1.2902$$

$$= -0.30785$$

ومن ثم الخطأ المطلق

$$|\in_t| = \left|\frac{\text{True Error}}{\text{True Value}}\right| \times 100\,\%$$

$$= \left|\frac{-0.30785}{0.98236}\right| \times 100\,\%$$

$$= 31.338\,\%$$

لنأخذ نفس المثال السابق نفسه ولكن لتكن n=4

$$(1-\alpha) \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$n = 4$$

$$b = 2.9 \qquad a = -2.15$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{2.9-(-2.15)}{4}$$

$$= 1.2625$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

بالتالي:

$$f(x_0) = f(-2.15)$$

$$f(-2.15) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-2.15)^2}{2}}$$

$$= 0.03955$$

$$f(x_1) = f(-2.15+1.265)$$

$$= f(-0.8875)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-0.8875)^2}{2}}$$

$$= 0.26907$$

$$f(x_2) = f(-0.8875 + 1.2625)$$
$$= f(0.375)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c^{-\frac{(0.375)^2}{2}}$$
$$= 0.37186$$

$$f(x_3) = f(0.375 + 1.2625)$$
$$= f(1.6375)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c^{-\frac{(1.6375)^2}{2}}$$
$$= 0.10439$$

$$f(x_1) = f(x_n)$$
$$= f(2.9)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c^{-\frac{(2.9)^2}{2}}$$
$$= 0.0059525$$

$$(1-\alpha) \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i\ odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2\\ i\ even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$\approx \frac{2.9-(-2.15)}{3(4)}\left[f(-2.15) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i=odd}}^{3} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2\\ i=even}}^{2} f(x_i) + f(2.9) \right]$$

$$\approx \frac{5.05}{12}\left[f(-2.15) + 4\ f(x_1) + 4\ f(x_3) + 2\ f(x_2) + f(2.9) \right]$$

$$\approx \frac{5.05}{12}\left[f(-2.15) + 4\,f(-0.8875) + 4\,f(1.6375) + 2\,f(0.375) + f(2.9) \right]$$

$$\approx \frac{5.05}{12}\left[0.03955+4(0.26907)+4(0.10439)+2((0.37186))+0.0059525\right]$$

$$\approx 0.96079$$

والخطأ يحسب بالطريقة نفسها ليصبح:

$$(1-\alpha)=\int_{-2.15}^{2.9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=0.98236$$

ويكتب الخطأ

$$E_t = True\ Value - Approximate\ Value$$

$$=0.98236-0.96079$$

$$=0.021568$$

جدول للمثال الثاني بقيم مختلفة ل n

n	Approximate Value	E_t	$\%\lvert\in_t\rvert$
2	1.2902	−0.30785	31.338
4	0.96079	0.021568	2.1955
6	0.98168	0.00068166	0.069391
8	0.98212	0.00023561	0.023984
10	0.98226	0.000092440	0.0094101

مثال (4) : تعطى المسافة التي يقطعها صاروخ من النقطة t=8 الى النقطة t=30 بالعلاقة:

$$x=\int_{8}^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt$$

1− استخدم قاعدة سيمبسون لحساب القيمة التقريبية لهذا التكامل من أجل N=4.

الحل:

$$x=\int_{8}^{30}f(t)dt$$

$$x\approx\frac{b-a}{3n}\left[f(t_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ i=odd}}^{n-1}f(t_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i=even}}^{n-2}f(t_i)+f(t_n)\right]$$

$$n = 4$$
$$a = 8$$
$$b = 30$$
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{30-8}{4} = 5.5$$
$$f(t) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right] - 9.8t$$

وبالتالي

$$f(t_0) = f(8)$$
$$f(8) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(8)}\right] - 9.8(8) = 177.27 m/s$$
$$f(t_1) = f(8+5.5) = f(13.5)$$
$$f(13.5) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(13.5)}\right] - 9.8(13.5) = 320.25 m/s$$
$$f(t_2) = f(13.5+5.5) = f(19)$$
$$f(19) = 2000\ln\left(\frac{140000}{140000-2100(19)}\right) - 9.8(19) = 484.75 m/s$$
$$f(t_3) = f(19+5.5) = f(24.5)$$
$$f(24.5) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(24.5)}\right] - 9.8(24.5) = 676.05 m/s$$
$$f(t_4) = f(t_n) = f(30)$$
$$f(30) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(30)}\right] - 9.8(30) = 901.67 m/s$$
$$x = \frac{b-a}{3n}\left[f(t_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(t_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(t_i) + f(t_n)\right]$$
$$= \frac{30-8}{3(4)}\left[f(8) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{3} f(t_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{2} f(t_i) + f(30)\right]$$
$$= \frac{22}{12}\left[f(8) + 4f(t_1) + 4f(t_3) + 2f(t_2) + f(30)\right]$$

$$= \frac{11}{6}\left[f(8) + 4\, f(13.5) + 4\, f(24.5) + 2\, f(19) + f(30)\right]$$

$$= \frac{11}{6}\left[177.27 + 4(320.25) + 4(676.05) + 2(484.75) + 901.67\right]$$

$$= 11061.64\ m$$

الجدول من اجل قيم مختلفة لـ N.

n	القيمة التقريبية للتكامل
2	11065.72
4	11061.64
6	11061.40
8	11061.35
10	11061.34

مثال (5) شركة تنتج دفاتراً كل دفتر 250 ورقة. ماهي احتمالية ان تكون هنالك دفاتر فيها أكثر من 250. ورقة هذا الاحتمال يعطى بالعلاقة:

$$P(y \geq 250) = \int_{250}^{\infty} 0.3515\ e^{-0.3881(y-252.2)^2}\, dy$$

يقرب هذا التكامل على الشكل الآتي:

$$P(y \geq 250) = \int_{250}^{270} 0.3515\ e^{-0.3881(y-252.2)^2}\, dy$$

1- احسب هذا التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف من أجل n=1

2- احسب الخطأ.

الحل:

الطلب الأول

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right]$$

حيث

$$a = 250$$
$$b = 270$$
$$f(y) = 0.3515e^{-0.3881(y-252.2)^2}$$
$$f(250) = 0.3515e^{-0.3881(250-252.2)^2}$$
$$= 0.053721$$

$$f(270) = 0.3515e^{-0.3881(270-252.2)^2}$$
$$= 1.3888 \times 10^{-54}$$

$$I \approx (270-250)\left[\frac{0.053721 + 1.3888 \times 10^{-54}}{2}\right]$$
$$\approx 0.53721$$

الطلب الثاني:

لا يمكن الحصول على القيمة الدقيقة، لذلك يجب حساب الخطأ الحقيقي والخطأ النسبي. لنفترض أن القيمة الحقيقية لهذا التكامل باستخدام احد البرامج التطبيقية (ماتلاب ، ماسمتيكا او مابل ...) كانت على الشكل الآتي:

$$P(y \geq 250) = \int_{250}^{270} 0.3515\ e^{-0.3881(y-252.2)^2}\,dy$$
$$= 0.97377$$

والحساب يكون وفق الشكل الآتي:

$$E_t = \text{True Value} - \text{Approximate Value}$$
$$= 0.97377 - 0.53721$$
$$= 0.43656$$

$$|\in_t| = \left|\frac{\text{True Error}}{\text{True Value}}\right| \times 100\,\%$$

$$= \left|\frac{0.97377 - 0.53721}{0.97377}\right| \times 100\,\%$$
$$= 44.832\,\%$$

مثال (6) المثال السابق نفسه ولكن من أجل n=2

الحل:

$$I = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

$$n = 2$$
$$a = 250$$
$$b = 270$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{270-250}{2}$$
$$=10$$
$$f(y) = 0.3515e^{-0.3881(y-252.2)^2}$$
$$I \approx \frac{270-250}{2(2)}\left[f(250) + 2\left\{\sum_{i=1}^{2-1} f(a+ih)\right\} + f(270)\right]$$
$$\approx \frac{20}{4}[f(250) + 2 f(250+1\times 10) + f(270)]$$
$$\approx \frac{20}{4}[f(250) + 2 f(260) + f(270)]$$
$$\approx \frac{20}{4}\left[0.053721 + 2\left(1.9560\times 10^{-11}\right) + 1.3888\times 10^{-54}\right]$$
$$\approx 0.26861$$

حيث

$$f(250) = 0.3515e^{-0.3881(250-252.2)^2}$$
$$= 0.05372$$
$$f(270) = 0.3515e^{-0.3881(270-252.2)^2}$$
$$= 1.3888\times 10^{-54}$$
$$f(260) = 0.3515e^{-0.3881(260-252.2)^2}$$
$$= 1.9560\times 10^{-11}$$

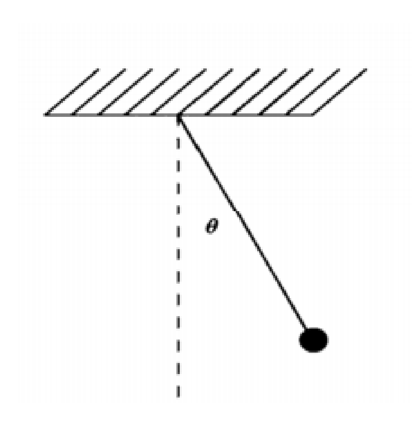
حساب الخطأ:

$$P(y \geq 250) = \int_{250}^{270} 0.3515 \ e^{-0.3881(y-252.2)^2} dy$$
$$= 0.97377$$
$$E_t = \text{True Value} - \text{Approximat Value}$$
$$= 0.97377 - 0.26861$$
$$= 0.70516$$
$$|\in_t| = \left|\frac{\text{True Error}}{\text{True Value}}\right| \times 100\ \%$$
$$= \left|\frac{0.97377 - 0.26861}{0.97377}\right| \times 100\ \%$$
$$= 72.416\ \%$$

n	Value	E_t	$\|\in_t\|\%$	$\|\in_a\|\%$
1	0.53721	0.43656	44.832	---
2	0.26861	0.70516	72.416	99.999
3	0.18009	0.79368	81.506	49.153
4	0.21815	0.75562	77.598	17.447
5	0.50728	0.46648	47.905	56.997
6	0.80177	0.17200	17.663	36.729
7	0.93439	0.039381	4.0442	14.193
8	0.95768	0.016092	1.6525	2.4317

يبيّن هذا الجدول حل المسألة بقيم مختلفة ل n

مثال 7: دراسة حركة النواس البسيط كما في الشكل أعلاه



وسنصف حركة هذا النواس بالمعادلة:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta.$$

ان كتلة الكرة للنواس لا يمكن ان تساوي الصفر و بالتالي تصبح المعادلة على الشكل

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

وهي تمثل المشتق الثاني للزاوية θ بالنسبة للزمن. من اجل السعات الصغيرة يمكننا أن نكتب $\sin\theta \approx \theta$ وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta,$$

هذه المعادلة حلها من وفق ما يأتي:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

إنَّ الشروط الابتدائية هي عند t=0 يكون النواس عند الوضع $\theta = \theta_0$.

لكن افتراضنا أن الزاوية صغيرة جدا غير صحيح دوما، لذلك نعود الى المعادلة :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

و لتكامل هذه العلاقة بالنسبة الى θ نجد

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + C,$$

لتعيين قيمة C نعود الى الشروط الابتدائية عند t=0 يكون النواس عند الوضع $\theta = \theta_0$. وبالتالي سنجد ان قيمة c هي $C = -g/l\cos\theta_0$

نعوّض قيمة c ونحل المعادلة فتصبح على الشكل

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0},$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

وبالتالي تصبح معادلة دور النواس على الشكل

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

سنجد أن الحلّ يمثل تكاملاً الآن، هذا التكامل يمكن حلّه بأية طريقة من الطرق السابقة وإيجاد دور النواس.

لنحاول تبسيط هذه المعادلة لدينا من قوانين المثلثات

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

والتعويض بـ

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}.$$

وسنجد

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\theta_0}{2}),$$

حيث

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

نحصل على القيم التي بالجدول بوصفه مثالاً:

$\sin^{-1}k$	$K(k)$
0°	1.57079 63270
10°	1.58284 28043
20°	1.62002 58991
30°	1.68575 03548
40°	1.78676 91349
50°	1.93558 10960
60°	2.15651 56475
70°	2.50455 00790
80°	3.15338 52519
90°	∞

مثال 8 : أوجد التكامل $I = \int_0^1 e^{-x}dx$ باستخدام طريقة سيمبسون من أجل n=100 و n=200 وقارن ناتجي التكامل، واحسب معامل الدقه $Q = \frac{s-I}{r-I}$ حيث I القيمة الحقيقية للتكامل ، s قيمة التكامل بطريقة سيمبسون من أجل n=100, و s قيمة التكامل بطريقة سيمبسون من أجل n=200, ذلك باستخدام لغة الفورتران.

الحل:

```
Program Simpson
implicit none
Real(8) :: x,s,x_i,x_f,r,q
Integer :: k,n,m
Write(*,*)'Enter x_i y x_f'
Read(*,*)x_i,x_f
Write(*,*)'Enter n'
```

```
Read(*,*)n
Write(*,*)'Enter m'
Read(*,*)m
Call Simp(x_i,x_f,s,n)
Write(*,*)'When n=100, s is worth',s
Call Simp2(x_i,x_f,r,m)
Write(*,*)'When n=200, s is worth',r
Q=(s-(1-exp(-1.)))/(r-(1-exp(-1.)))
Write(*,*)'The quotient of precision is',Q
Subroutine Simp(x_i,x_f,s,n)
implicit none
Real(8), intent(in) :: x_i,x_f
Real(8), Intent(out) :: s
Real(8) :: dx
Integer :: n
dx=(x_f-x_i)/n
s=(dx/3.)/(f(x_i)+f(x_f))
Do k=2,n-2,2
x=x_i+k*dx
s=s+2*f(x)
end do
do k=1,n-1,2
x=x_i+k*dx
s=s+4*f(x)
end do
s=(dx/3.)*s
end subroutine
Subroutine Simp2(x_i,x_f,r,m)
implicit none
Real(8), Intent(in) :: x_i,x_f
Real(8), Intent(out) :: r
Real(8) :: dx
Integer :: m
```

```
dx=(x_f-x_i)/m
r=(dx/3.)/(f(x_i)+f(x_f))
Do k=2,m-2,2
x=x_i+k*dx
r=r+2*f(x)
end do
do k=1,m-1,2
x=x_i+k*dx
r=r+4*f(x)
end do
r=(dx/3.)*r
end subroutine
Real(8) Function f(x)
Real(8), Intent(in) :: x
f=exp(-x)
end function
end program
```

5- تربيع غوص (Gaussian quadrature):

صممت الطرق التي نقدمها لمسائل حلّت بطريقة تقسيم المجال الى مجالات جزئية متساوية. لتكن النقطة x_i النقطة التي تليها x_{i+1} المسافة بينهما هي h عدد النقط N. وهذه الطريقة مناسبة عندما تكون القيمة مختلفة كثيراً عند منطقة معينة، او من أجل حل المعادلات التفاضلية.

الفكرة الأساسية في كل التكاملات هي تقريب التكامل من اجل الأخطاء.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(x_i) \qquad (3-25)$$

حيث W و X الوزن والنقطة المختارة من الشبكة، على التتالي. بالاعتماد على منشور تايلور والعودة الى العلاقة (3-25) نحصل على الآتي:

$$\omega : \{h/3, 4h/3, 2h/3, 4h/3, \ldots, 4h/3, h/3\} \qquad (3-26)$$

ومن اجل الوزن بالاعتماد على علاقة شبه المنحرف *trapezoidal rule* نحصل على التالي:

$$\omega : \{h/2, h, h, \ldots, h, h/2\} \quad (3\text{-}27)$$

تقوم صيغة التكامل بشل عام على أساس منشور سلسلة تايلور ل N نقطة. سوف نكامل بشكل محدد كثير الحدود *P* من المرتبة . *N-1*. حيث، *N* وزن w_n يصف المعادلة الخطية من الدرجة *N*، نكتب التكامل على الشكل:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b W(x)g(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(x_i). \quad (3\text{-}28)$$

حيث *g(x)* و *W(x)* تابع التجانس والوزن على التتالي، تكون قيمة تابع الوزن موجبه داخل مجال التكامل $x \in [a,b]$. إنَّ التسمية بتابع الوزن تعود إلى انه يمكن استخدامه لإعطاء المزيد من التركيز على حد معتمد على حد سابق قبله.

في الفيزياء هنالك العديد من كثيرات الحدود المهمة التي تنشأ من حل المعادلات التفاضلية. هناك جدول في الأسفل يعطي فكرة عن تابع الوزن.

Weight function	Interval	Polynomial
$W(x) = 1$	$x \in [-1, 1]$	Legendre
$W(x) = e^{-x^2}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	Hermite
$W(x) = e^{-x}$	$0 \leq x \leq \infty$	Laguerre
$W(x) = 1/(\sqrt{1 - x^2})$	$-1 \leq x \leq 1$	Chebyshev

إن أهمية استخدام كثير الحدود في حل التكاملات يمكن أن يلخص بما يلي:

- مما سبق، تعتمد الفكرة الأساسية على إيجاد منشور تايلور باستخدام *N* نقطة، و نكامل كتير الحدود *P* من المرتبة *N-1*. إذا كان بالإمكان تقريب التابع *f(x)* بكثير حدود من الدرجة N-1 عندئذ:

$$f(x) \approx P_{N-1}(x) \quad (3\text{-}29)$$

- مع N نقطة من الشبكة نكون قادرين على إجراء التكامل لكثير الحدود من المرتبة N-1 ، PN-1

- إن طريقة تربيع غوص أشمل. يمكننا أن نحصل على تقريب أفضل بتابع كثير حدود من درجة اكبر من N للتابع f(x) . يمكننا الكتابة بدقة أكثر

$$f(x) \approx P_{2N-1}(x) \quad (3\text{-}30)$$

ومن أجل N نقطه من الشبكة يمكننا أن نكتب :

$$\int f(x)dx \approx \int P_{2N-1}(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} P_{2N-1}(x_i)\omega_i \quad (3\text{-}31)$$

- لهذا السبب نستخدم التابع f(x) من كثير حدود من الدرجة 2N−1 لأنه لدينا 2N معادلة، N نقاط من الشبكة.

6- تكاملات مونتي كارلو: (Monte - Carlo)

ان طريقة تكاملات مونتي كارلو كثيرة الاستخدام في الوقت الحاضر، لتكامل متعدد الأبعاد في المسائل الكيميائية.

يمكن أن توصف هذه الطريقة العددية بوصفها إحصائية عددية، إذ تستعمل في هذه الطريقة سلاسل عددية لأعداد عشوائية لإتمام عملية المحاكاة.
قَدْ تُتغايرُ طرق المحاكاةِ الإحصائيةِ إلى طرقِ التمييزِ العدديةِ التقليديةِ، التي تقدم نموذجاً تُقدّمُ إلى معادلات تفاضليةِ عاديةِ أَو جزئيةِ تَصِفُ نظاماً طبيعيا أَو رياضياً.

طرق المحاكاة تبنى بوصفها طرق بناء عددية، تقدم نموذجا لحل معادلات تفاضلية عادية او جزئية تعبر عن ظواهر فيزيائية معينة.

في التطبيقات العديدة لمونتي كارلو، إنَّ الظاهرة الفيزيائية مقلدة مباشرة، وليس هنالك حاجة لكتابة المعادلات التفاضلية التي تصف الظاهرة الفيزيائية. إنَّ المطلوب هو بناء نظام رياضي يكون موصوفا بتابع احتمالي لدراسة الظاهرة الفيزيائية.

بمجرد بناء أو وصف التابع الاحتمالي، ومحاكاة مونتي كارلو تتابع بالعينة العشوائية من خلال هذا التابع الاحتمالي. والنتيجة المطلوبة مأخوذة لمعدل عدّة ملاحظات يمكن أن تكون ملاحظة وحيدة أو عدة ملايين من الملاحظات.

في العديد من التطبيقات العملية، يمكن حساب الخطأ الإحصائي في هذه النتيجة المتوسطة، في محاكاة مونت كارلو يجب تعريف مجال الخطأ عند إنجاز العمليات الحسابية.

لنفترض أنَّ الظاهرة الفيزيائية يمكن أن يعّبر عنها بتابع كثافة الاحتمال، وبالتالي إنَّ محاكاة مونتي كارلو يمكن ان تتابع بأخذ القيم من خلال التابع الاحتمالي، التي تستوجب بناء طريقة فّعالة وسريعة لتوليد الأعداد بشكل عشوائي التي وزعت على مجال الدراسة من الفترة [0,1].

نتائج هذه العينة العشوائية يجب أن تجمع وترتب في أسلوب مناسب لإعطاء النتيجة المطلوبة، لكن الخاصية الأساسية لمونتي كارلو هي توليد الأعداد، بشكل عشوائي، للوصول لحل المسألة الفيزيائية المدروسة.

على النقيض من ذلك، طرق الحل التقليدية تبدأ الحل بالنموذج الرياضي للوصول إلى النموذج الفيزيائي، تكتب المعادلات التفاضلية وبعد ذلك تحلّ هذه المعادلات حلاً جبرياً لهذا النظام المجهول.

يجب أن نتذكر، إنَّ هذا الوصف العام لطريقة مونتي كارلو يمكن ألا يتوافق على بعض التطبيقات. ذلك طبيعي لأن طريقة مونتي كارلو تستخدم طريقة المحاكة بشكل عشوائي، عن طريق بناء التابع الاحتمالي.

على أية حال، يجب أن نضع الخطوات الأساسية بغية بناء نموذج مونتي كارلو الذي يمثّل بتعريف التابع الاحتمالي، بينما يبدو هذا التحويل اصطناعياً. هذه الخطوة تسمح ببناء لغرض المحاكاة لذلك يمكن القول إنَّ طريقة مونتي كارلو تقدم محاكاة لدراسة الظاهرة الفيزيائية.

هنـاك، علــى الأقـل أربعــة مكونــاتِ حاسـمة لكــي تَفْهـمَ مـونتي كــارلو الأسـاسـية الاستراتيجية. عند بناء نموذج مونتي كارلو على الأقل هنالك أربع خطوات يجب ان تدرس وان تؤخذ بعين الاعتبار من أجل بناء نموذج مونتي كارلو وهي:

1- المتغير العشوائي.

2- تعريف التابع الاحتمالي.

3- التابع الاحتمالي اللحظي.

4- حساب المجموع الكلي وتعريف مجال الخطأ.

7-الإيضاح الأول لاستعمال طرقِ مونتي كارلو،

سنحاول توضيح فكرة تكامل مونتي كارلو على المثال الذي درس في الفصل السابق بالاعتماد على الطرق التقليدية:

$$I = \int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(x_i), \qquad (3\text{-}32)$$

حيث w_i الأوزان قررت بطريقة التكامل المعينة (تايلور اوسيمبسون) مع وجود النقط x_i من مجال الدراسة. حتى نعطي فكرة عن طريقة دراسة تكامل مونتي كارلو، سنحاول أن نعطي هذه الدراسة بالقيم التدريجية لنحصل المطلوب. سوف نجري تقرب على اساسه سوف نعرف الأوزان على أنها تساوي الى القيمة واحد أي $w_i=1$ وكذلك نعرف h عرض الخطوة كما في العلاقة التالية:

$$dx = h = (b-a)/N \text{ where } b = 1,\, a = 0 \qquad (3\text{-}33)$$

وبالتالي يصبح على الشكل التالي

$$I = \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i). \qquad (3\text{-}34)$$

نعرف عندها التابع الاحتمالي على الشكل التالي

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)p(x_i), \quad (3\text{-}35)$$

وقيمة هذا التابع الاحتمالي $p(x)=1$ عندما تكون قيمة x $x \in [0,1]$ وتكون قيمة هذا التابع الاحتمالي تساوي الصفر إذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لهذا المجال أي خارج هذا المجال.

$$I = \int_0^1 f(x)dx \approx \langle f \rangle. \quad (3\text{-}36)$$

ان الحد الذي يمثل التابع الوسطي يعتبر من الحدود المهمة في طريقة مونتي كارلو <f> ، والحد الآخر الذي يعتبر مهماً كذلك هو طريقة حساب الأخطاء او ما يسمى التشتت σ. نعرف التشتت في تكامل مونتي كارلو للدراسة على المجال $x \in [0.1]$ على الشكل التالي:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - \langle f \rangle)^2 p(x_i), \quad (3\text{-}37)$$

التي يمكن أن نعبَّر عنها بالشكل

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right)^2, \quad (3\text{-}38)$$

أو

$$\sigma_f^2 = \left(\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2\right).$$

من اجل N قيمة، عندئذ يصبح التكامل على الشكل:

$$\langle I \rangle_M = \frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} \langle f \rangle_l. \quad (3\text{-}39)$$

وبالتالي يصبح مجال الخطأ من أجل ال N قيمة على الشكل:

$$\sigma_N^2 \approx \frac{1}{N}\left(\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2\right) = \frac{\sigma_f^2}{N}.$$

وسنجد أن الخطأ يتناسب مع N على الشكل التالي

$$\sigma_N \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

إن طريقة مونتي كارلو تعتمد على ان تكون قيمة σ_N أصغر ما يمكن، أي أن يكون الخطأ بأصغر قيمة له.

مثال: ليكن لدينا التكامل وفق الشكل التالي، ونريد أن نوجد قيمة هذا التكامل بالاعتماد على طريقة مونتي كارلو

$$\int_0^1 dx \frac{4}{1+x^2} = \pi,$$

في بالبداية يجب أن نبحث عن طريقة لتوليد الأعداد، بشكل عشوائي، أو بالأصح نبحث عن طريقة لتعيين قيمة N طريقة تكرار التجربة خلال مجال الدراسة الذي هو [0.1] ، وبعد ذلك نبحث عن تعريف للتابع الاحتمالي لهذا التكامل.

او يمكن ترتيب هذه الخطوات على الشكل التالي

1- نوجد العدد N الذي يمثل عدد مرات تكرار التجربة.

2- تعريف الحلقة التي تغطي مجال القيمة N ونبحث طريقة توليد العدد N الموافقة لقيم x_i التي تنتمي لمجال الدراسة (طريقة الانتقال من قيمة الى قيمة للوصول إلى العدد النهائي N) وذلك بشكل عشوائي.

3- ايجاد قيم $f(x_i)$.

4- حساب مجال الخطأ لكل حلقة.

5- بعد حساب ال N حد ايجاد الخطأ النهائي.

8-نموذج ايسنج:

نعتبر نموذج إيسينج لمادة فيروماغناتيك بوصفه مثالاً:

$$H = -J \sum_{ij} S_i S_j$$

حيث **J** تمثل الطاقة الإيجابية، $S=\pm 1/2$ **i** و **j** هي أقرب جارين من الشبكة البللورية . في هذه الحالة قيمة S تتغير عن طريق دورة القلب(للإلكترون) والتغيير في مجال الطاقة هو ببساطة

$$\Delta E_i = -J \sum_j S_j$$

هذا المجموع يمثل أقرب جارتين تدوران بشكل معكوس. تتم المحاكاة عن طريق اختيار السبين (وتكون بشكل عشوائي) واختبار ما إذا كانت الطاقة ستزداد او تتناقص. إذا تناقصت يعني أن السبين سيدور بشكل عكسي. غير ذلك ستكون موجبة. سنولد العدد **r** بشكل عشوائي ليأخذ قيمه بين 0 و 1 ونقارن ذلك بالحد $e^{-\beta\Delta E}$. اذا كان لها قيمة السبين نفسها ستدور بشكل عكسي.

لندرس نموذج ايزنج بوصفه مثالاً عن تكاملات مونتي كارلو إنَّ هذا النموذج يعتبر من النماذج المهمة بالفيزياء لأنه يصف الانتقالات الطاقية فيها.

لتبسيط نموذج ايزنج سنأخذ المعادلة على الشكل:

$$E = -\sum_{ij} J_{ij} S_i \cdot S_j$$

حيث i و **j** نقاط محددة من الشبكة البلورية $S=\pm 1/2$.

لتبسيط الدراسة لدينا شبكة من بعدين فقط، والتفاعلات تكون بين أقرب نقطتين، في هذه الحالة تصبح المعادلة على الشكل:

$$E = -J \sum_{i,j_i} S_i \cdot S_{j_i}$$

حيث J_i تكون محصلة الأربع نقاط الأقرب للنقطة **i** .

في نموذج ايزنج تتغير الحالة عن طريق تغير الحد $S=\pm 1/2$ اي القلب باتجاه معاكس، وبالتالي إن تغير الطاقة نتيجة هذا التغير بالدرجة K يعطى بالعلاقة:

$$\Delta E_k = -J \sum_{Jk} S_{Jk}$$

بالحقيقة الحد الوحيد الذي يتغير هو

$$Z_k = \exp\left(-\Delta E_k / k_B T\right)$$

وبالتالي فإنه سيأخذ أحد الخمسة القيم المختلفة المقدمة من النقاط المجاورة (حسب اتجاه السبين). وسنلاحظ أن الحد الذي يتغير في هذا ا النموذج هو J/kBT، لذلك عند كتابة برنامج لهذا النموذج يجب الانتباه إلى اشارة J و T بشكل منفصل. يجب أن تتم الحسابات بشكل دوري حسب الشروط المبدأية. هناك طرق عددية لإنجازها. منها الطريقة البسيطة التي تعتمد على انه لدينا نظام من خط من السبين الذي يدور ويغير اشارته. من اجل نظام يحوي اكثر من خط سبينNxN يجب ان نحدد المصفوفة ذات الحدود $2N^2$.

يجب ان تتم الحسابات على الشكل التالي:

1. اتجاه السبين الابتدائي، إذا كان التحديد بشكل عشوائي او محدد.
2. نختار سبين القلب، يفضل ان يقلب السبين اتجاهه بشكل عشوائي ويمكن ان يؤدي هذا الى اختيارات زائفة لدرجات الحرارة.
3. وضع الشروط التي ستؤدي الى قلب اتجاه السبين.
4. عندما يقلب السبين اتجاهه. لا تنسى القيمة المقابلة له في الاتجاه الأخر.
5. احسب قيمة الطاقة.
6. أضف المساهمات لحساب المعدل.
7. عد إلى الخطوة الثانية وأعد الحساب.

من الأفضل تشغيل البرنامج لبعض الوقت للوصول إلى التوازن قبل حساب المتوسطات. وفي النهاية إيجاد إجمالي الطاقة.

تمارين

1–أوجد قيمة التابع $F(x) = 1 + x^2$ مستخدماً طريقة سيمبسون من أجل القيمة الدنيا=2.0 والعليا=3.0 وعدد الأشرطة=20.

2–إذا علمت أن شدة الضوء المنعرج تعطى بالعلاقة:

$$I = 0.5I_0[(C(V) + 0.5)^2 + (S(V) + 0.5)^2]$$

حيث I_0 شدة الضوء الوارد، Vمقدار متعلق بالمسافة z، $C(V), S(V)$ تكاملات فرينل، المطلوب:

أوجد قيمة تكاملات فرينل إذا علمت أن:

$$C(V) = \int_0^V cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)d\omega$$

$$S(V) = \int_0^V sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)d\omega$$

3–لدينا منطقة مربعة في المستوي xy حيث: $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ تتوزع بانتظام داخل هذه المنطقة شحنات كهربائية ، ρ ثابت التوزع، احسب الكمون الكهربائي الساكن في نقطة (x_p, y_p) والمطلوب :

احسب الكمون الكهربائي الناتج عن توزع الشحنات إذا علمت أن

$$\varphi(x_p, y_p) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dxdy}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}}$$

الفصل الرابـع

المعادلات التفاضلية العادية

"للقوانين الفيزيائية"

تعبّر أي معادلة تفاضلية عن العلاقة بين المشتقات، أو بين المشتقات وأي توابع للمتحولات. تؤسس المعادلة التفاضلية للعلاقة بين أي زيادة لكمية معينة والكمية ذاتها. هذه الخاصة للمعادلة التفاضلية تجعلها التعبير الطبيعي عن مبدأ السببية، الذي هو أساس العلوم الطبيعية.

يطلق اسم المعادلات التفاضلية على المعادلات التي تحوي مشتقات و تفاضلات لبعض التوابع الرياضية، و تظهر فيها بشكل متغيرات. حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه التوابع الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات. تبرز المعادلات التفاضلية بشكل كبير في تطبيقات الفيزياء و الكيمياء، وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية و الاجتماعية و الاقتصادية.

يمكن تقسيم المعادلات التفاضلية إلى قسمين:

معادلات تفاضلية عادية تحتوي، على توابع ذات متغير مستقل واحد، ومشتقات هذا المتغير.

معادلات تفاضلية جزئية تحتوي توابع رياضية لأكثر من متغير مستقل مع مشتقاتها الجزئية.

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية على أنها رتبة أعلى مشتق موجود في هذه المعادلة: فإذا حوت المعادلة مشتقاً أولاً ومشتقاً ثانياً فقط تعتبر من الرتبة الثانية ... وهكذا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى تحتوي على مشتقات من الدرجة الأولى فقط.

توجد طرق عديدة لحل المعادلات التفاضلية منها:

طرائق تحليلية Analytical Solution، طرائق عدديةNumerical Solution ، يوجد أكثر من أسلوب للحل العددي وكذلك التحليلي، كما توجد معادلات مشهورة

مثل معادلات لابلاس وبرنولي وغيرهم. ليس هناك طريقة مثلى لحل المعادلات التفاضلية، فكل معادلة لها ميزتها الخاصة والطريقة المطبقة لحل إحداها قد لا تصلح لغيرها. تعتبر دراسة الفيزياء إلى حد بعيد دراسة معادلات تفاضلية لذا فمن غير المستغرب أن الحل العددي للمعادلات التفاضلية هو مركز اهتمام الفيزياء الحاسوبية.

حل المعادلات التفاضلية بالطرق العددية

1- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

1-1- طرق أولر Euler Methods

قد يكون أولر أكثر علماء الرياضيات إنتاجاً في القرن الثامن عشر (وربما أكثر علماء الرياضيات إنتاجاً حتى عصرنا هذا) وهو عالم سويسري (1707–1783) وقد نشر خلال حياته الكثير من الكتب والمقالات.

A. طريقة أولر البسيطة:

لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'(x) = f(x, y) \qquad (4\text{-}1)$$

إذا كان f تابع لـ x فقط، عندئذ يمكننا حل هذه المعادلة مباشرة وذلك كما يلي:

$$y(x) = \int^{x} f(x)dx \qquad (4\text{-}2)$$

وحيث أننا غير مهتمين بمثل هذا الوضع فإننا سوف نفترض أن f هو تابع لـ x و y ، ولنحاول حل المعادلة (4–1) باستخدام سلسلة تايلور، إذا علمنا كل المشتقات يمكننا تركيب الحل من المنشور،

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\frac{y'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2\,\frac{y''(x_0)}{2!} + \ldots\ldots \qquad (4\text{-}3)$$

وحيث إن $y'(x)$ معروف، فيمكننا الحصول على المشتقات الأعلى على سبيل المثال، يكون المشتق الثاني:

$$y''(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \tag{4-4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + f(x, y)\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

وهكذا نلاحظ أن الوضع يزداد تعقيداً كلما انتقلنا إلى مشتق أعلى، ونجد أن الحل بسلسلة تايلور ليس مساعداً، وعموماً يمكننا اعتبارها بوصفها مقياساً تقاس به الطرق الأخرى، ويكون الحل بالصيغة

(4-5)

$$y(x) = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + f(x_0, y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right] + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(\xi)$$

حيث $y_0 = y(x_0)$

تعطينا المعادلة التفاضلية الأصلية مشتق y' عند أي نقطة، إذا كنا نستطيع أن نعطي قيمة y عند أي نقطة، فإننا نستطيع تقريب التابع بسلسلة تايلور

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) \tag{4-6}$$

هذه الطريقة بسيطة (ليست جيدة).

إذا أشرنا إلى الخطوة $(x - x_0)$ بـ h تكتب المعادلة (4–5) بالصيغة:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + O(h^2) \approx y_0 + hf_0 \tag{4-7}$$

حيث حددنا $y_0 = y(x_0)$ ، $f_0 = f(x_0, y_0)$ ،

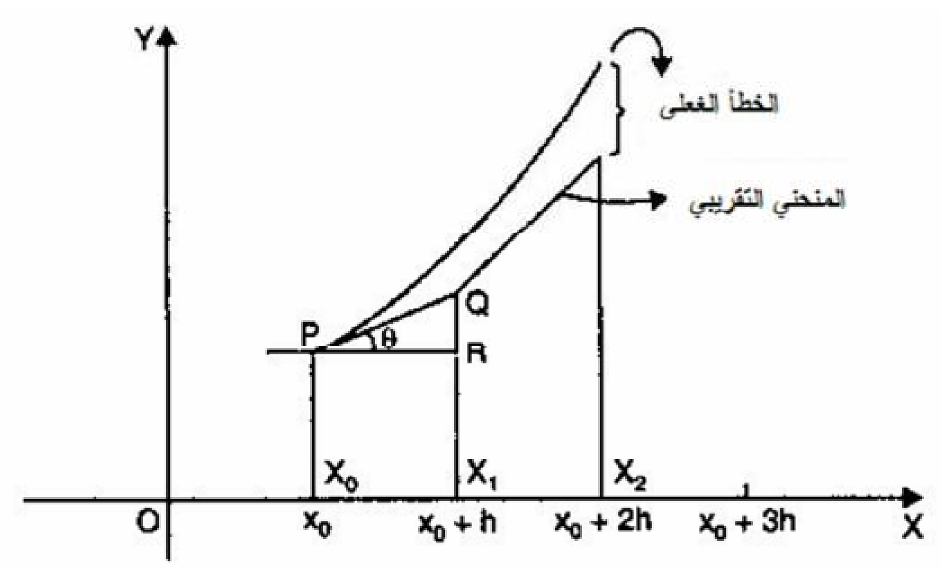
وهذا يعرف بطريقة أولر البسيطة، وهي تمكننا من السير في الحل بعيداً، خطوة في كل مرة.

التطبيق الموضوعي هو في تقسيم منطقة التكامل الكلي إلى خطوات من الحجم h ويكون الخطأ في استخدام العلاقة من مرتبة $O(h^2)$ وتحريك الحل بخطوة واحدة في كل مرة بطريقة واضحة، يمكن إعادة الحسابات من أجل خطوة ذات حجم مختلف أي كلما تقلص h صغَّر الخطأ فكي نقلل الخطأ إلى الربع يجب علينا أن نصغر المجال إلى $\frac{h}{2}$.

تكتب خوارزمية الحل بطريقة أولر للمعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ التي تحقق الشروط

$a \le x \le b,\ y(a) = Q$ على $N+1$ مسافة في المجال $[a,b]$ كالتالي:

INPUT	A,B,N,Q	إدخال القيم الحدية وعدد الخطوات والشرط الابتدائي
STEP 1	H=(B-A)/N X=A Y=Q	
STEP 2	FOR ı=1,2,...,N DO STEPS 3,4	
STEP 3	$y = y + h \times f(x, y)$ $x = a + i \times h$	حساب y_i حساب x
STEP 4	OUTPUT X,Y	
STEP 5	STOP	



الشكل(1-4) يبين طريقة أولر البسيطة .

مثال 1: اكتب خوارزمية وبرنامجاً لحل المعادلة التفاضلية باستخدام طريقة أولر

$$y'(x) = y^2 + 1$$

في المنطقة $0 < x < 1$ حيث $y(0) = 0$ ،

أوجد الحل من أجل $h = 0.25,\ 0.2,\ 0.05,\ 0.0025$.

الحل:

خوارزمية الحل		الحل ببرنامج بلغة الفورتران
INPUT A=0,B=1,N=20, $beta = 0$ $h = \frac{1}{N}$ x=A y= beta FOR *i*=1,2,...,N $f(x,y) = y^* y + 1$ $y = y + h \times f(x,y)$ NEXT I $x = x + i \times h$ OUTPUT X,Y STOP		REAL F,H,X,Y A=0 B=1 N=20 X=A Y=0 H=(B-A)/N DO 12 I=1,N F=Y*Y+1 Y=Y+H*F 12 CONTINUE X=X+I*H WRITE(*,*) X,Y END

h	x	y	Y'=f(x,y)	$y=y_0+hf(x,y)$
0.2	0	0	1	0.2
0.2	0.2	0.2	1.04	0.408
0.2	0.4	0.408	1.167	0.641
0.2	0.6	0.641	1.411	0.923
0.2	0.8	0.923	1.851	1.294

الأجوبة من أجل خطوات مختلفة

h=0.25	0.2	0.05	0.0025
y=1.255187	1.294131	1.466347	1.5522

الحل الدقيق: 1.55741 الحل التحليلي: $y = \tan(x) + c$

مثال 2: تقوم طائرة إنقاذ بالطيران بشكل أفقي بسرعة $150m/\sec$ وعلى ارتفاع $2km$. فإذا علمت أن مهمة هذه الطائرة هي إلقاء طرد مساعدة، فالمطلوب كتابة برنامجين باستخدام الحل التحليلي طريقة أولرْ تقوم بما يلي:

1- حساب الزمن اللازم لوصول الطرد من الطائرة إلى الأرض من لحظة دفعه من الطائرة.

2- حساب المدى الأفقي الذي يقطعه الطرد من لحظة دفعه من الطائرة.

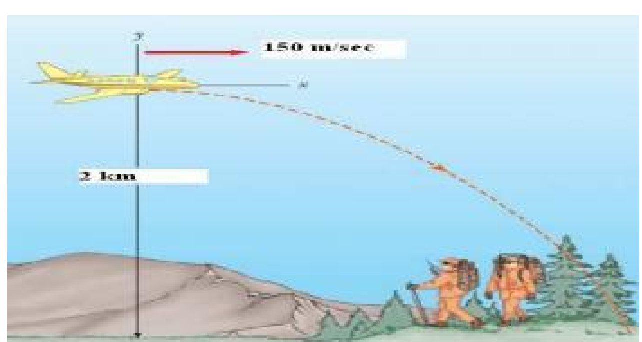
الحل:

تعطى المعادلة العامة لمسار الحركة بالمعادلتين:

$$x = \upsilon_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = \upsilon_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

حيث تشير a_x, a_y إلى التسارع على المحورين OX, OY وحيث أن $a_x = 0$ لأنه لا يوجد قوة تؤثر على المحور OX و $a_y = g = 9.8m/\sec^2$ تسارع الجاذبية الأرضية.



بالتبديل في المعادلات السابقة وبعد حذف الزمن نجد : $y = kx^2 \;;\; k = \frac{g}{2u^2}$

حيث وضعنا $x = ut, \quad a_x = 0 \quad \upsilon_x = u,$ و $y = \frac{1}{2} gt^2, \quad a_y = g, \quad \upsilon_y = 0,$

ويعطى الزمن اللازم لوصول الطرد إلى الأرض بالعلاقة: $t_{max} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

المخطط التدفقي لحساب الزمن و المدى الأفقي الذي يقطعه الطرد من لحظة دفعه من الطائرة:

برنامج الحل بلغة الفورتران باستخدام الطريقة التحليلية

```
      REAL T,X,Y,H,TMAX
      WRITE(*,*)"VELOCITY OF PROJECTILE"
      READ(*,*)VEL
      WRITE(*,*)"ACCEKRATION DU TO GRAVITY"
      READ(*,*)G
      WRITE(*,*)"VERTICAL HIGHT"
      READ(*,*)HEIGHT
      WRITE(*,*)"GIVEN NUMBER OF STEP"
      READ(*,*)N
      TMAX=SQRT(2*HEIGHT/G)
      H=TMAX/N
      WRITE(*,*)"HORIZONTALLY THROWN PROJECTILE"
      WRITE(*,*) "-------------------------"
      WRITE(*,*)"TIME    X-DISTANCE       Y-HEIGHT"
      WRITE(*,*) "-------------------------"
      DO 12 K=0,N
                T=K*H
                X=VEL*T
                Y=HEIGHT-G/2.*T**2
      WRITE(*,*)T,X,Y
12    CONTINUE
      STOP
      END
```

برنامج الحل بلغة الفورتران باستخدام طريقة أولر

```
      REAL Z,F,X,Y,YY
      WRITE(*,*)'THE HIGHT OF THE PROJECTILE'
      READ(*,*)B
      WRITE(*,*)'THE VALUE OF SPEED'
      READ(*,*)X2
      T=0.1
```

```
    X=X2*T
    Y=0
    H=0. 1
    N=IRAND (B/H)
    DO 12  I=1,N-1
    Z=(Y/T)+4.9*T
    F=X/T
    X=X+H*F
    Y=Y+H*Z
    T=T+H
    YY=B-Y
12  IF (Y.GT.B) GOTO 14
14  CONTINUE
    WRITE(*,*)'T=',T,  '  YY=',YY,  '   X=',X
    END
```

الحل بالطريقة التحليلية		
Y - HEIGHT	X	TIME
2000	0	0
1995	151.52	1.01
1980	303.05	2.02
1955	454.57	3.03
1920	606.09	4.04
1875	757.61	5.05
1820	909.14	6.06
1755	1060.66	7.07
1680	1212.18	8.08
1595	1363.71	9.09
1500	1515.23	10.1
1395	1666.75	11.11
1280	1818.27	12.12
1155	1969.8	13.13
1020	2121.32	14.14
875	2272.84	15.15
720	2424.37	16.16
555	2575.89	17.17
380	2727.41	18.18
195	2878.93	19.19
0	3030.46	20.2

الحل باستخدام طريقة أولر		
Y HEIGHT	X	TIME
....	....	....
285.348	2850	19
267.014	2865	19.1
248.581	2880	19.2
230.051	2895	19.3
211.424	2910	19.4
192.698	2925	19.5
173.875	2940	19.6
154.954	2955	19.7
135.935	2970	19.8
116.819	2985	19.9
97.604	3000	20
78.292	3015	20.1
58.883	3030	20.2
39.375	3045	20.3
19.77	3060	20.4
0.067	3075	20.5

B. طريقة أولر المعدلة:

نجد من دراسة طريقة أولر البسيطة أن قيمة المشتق عند نهاية المجال لم تستخدم، وهذا يؤدي إلى انخفاض دقة الحل، لهذا يكون من المناسب أكثر استخدام قيمة أخرى للمشتق، مثل قيمة منتصف الطريق عبر الخطوة؟

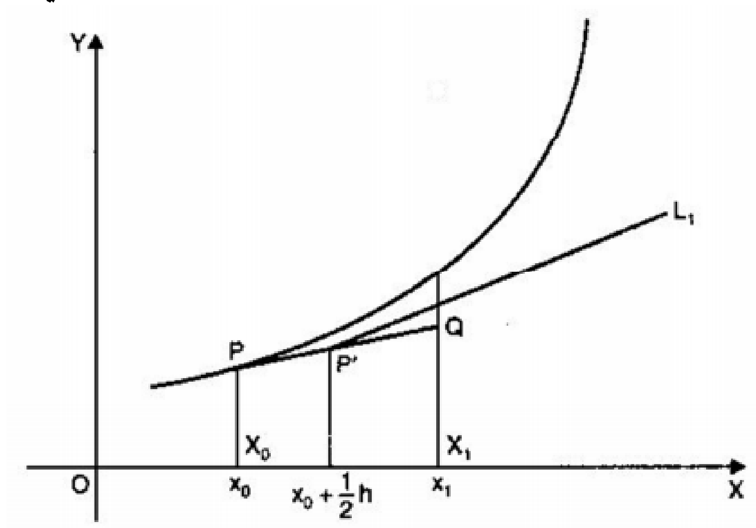
نضع عبارة لقيمة x بالشكل التالي: $x_{mid} = x_0 + \frac{h}{2}$

وتحسب قيمة y بالعبارة: $y(x_{mid}) = y_0 + \frac{h}{2} \times y_0' = y_0 + \frac{h}{2} \times f_0$

أو $y_{mid} = y_0 + \frac{h}{2} \times f(x_0, y_0)$

ربطنا هنا مرة أخرى مشتق y مع التابع f مع استخدام المعادلة التفاضلية التي نحاول حلّها.

بهذه العبارة من أجل $y(x_{mid})$، ونحسب المشتق عند نقطة المنتصف $f(x_{mid}, y_{mid})$ ونستخدمها بوصفها تقريباً للمشتق على المجال الداخلي نجد:



الشكل (2–4) يبين طريقة أولر المعدلة

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_{mid}, y_{mid}) + O(h^3) \quad (4\text{-}8)$$

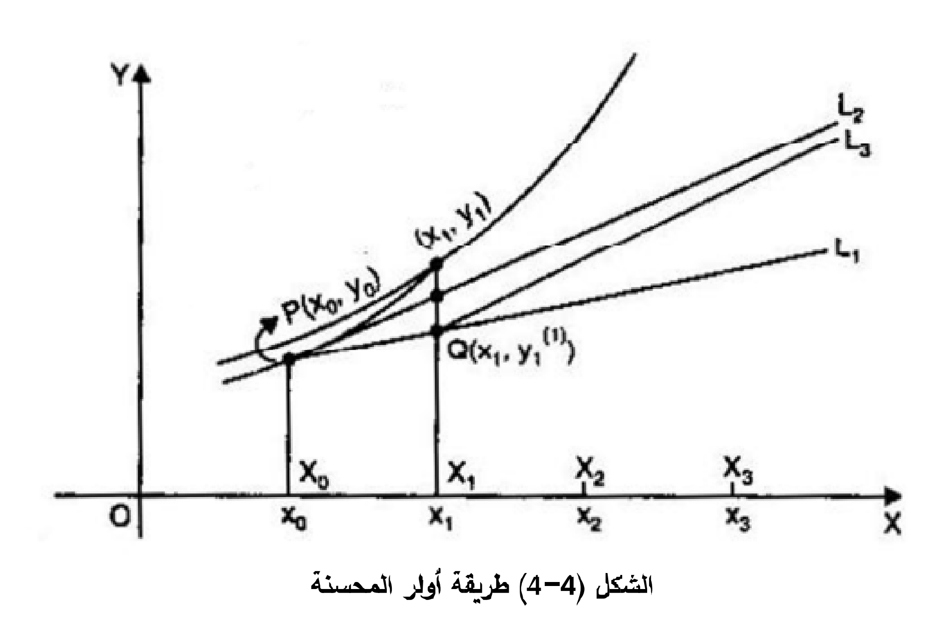
أو يمكننا التفكير بهذه الطريقة، وهي إيجاد تقريب بسيط للمشتق عند نقطة المنتصف

$$f(x_{mid}, y_{mid}) = y'(x_{mid}) \approx \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} \qquad (4\text{-}9)$$

C. طريقة أولر المحسنة :

تغيير آخر ممكن على طريقة أولر إذا حاولنا إيجاد حل باستخدام القيمة المتوسطة للمشتق، نستخدم طريقة أولر للتخمين عند $y(x_0+h)$ ، والتي نستخدمها لحساب المشتق عند نهاية المجال. يحسب متوسط المشتق من قيمته المعروفة عند بداية المجال $f(x_0, y_0)$ وقيمته عند $f(x_0+h, y_0+hf_0)$ وهكذا نحصل على طريقة أولر المحسنة بالعلاقة:

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h\frac{f_0 + f(x_0+h, y_0+hf_0)}{2} + O(h^3) \qquad (4\text{-}10)$$



الشكل (4–4) طريقة أولر المحسنة

مثال 3: الدارة في الشكل التالي تحتوي وشيعة لها تحريض ذاتي $L = 50H$ والمقاومة $R = 20\Omega$ ومنبع كمون $V = 10\ Volt$ إذا أغلقت الدارة عند $t = 0$ يحقق التيار $I(t)$ العلاقة:

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = E$$

1–أوجد باستخدام طريقة أولر المحسنة شدة التيار من أجل $0 < t \leq 10$.

الحل: بعد التعويض بالمعادلة نجد:

$$\frac{d}{dt}I(t) = 0.2 - 0.4I(t)$$

ويصبح شكل معادلة أولر المحسنة

$$I(t_0 + h) = I(t_0) + h\frac{0.4 - 0.4(I_{t_0} + I_{t_{0+h}})}{2}$$

بالتبديل بقيمة $I_{t_0+h} \approx I_0$ من أجل $h = 1$ نجد:

t	h	I_0	f_0= $0.2\text{-}0.4I_0$	F= $0.2\text{-}0.4(I_0+F_0)$	I= $I_0+0.5(F_0+F)$
1	1	0	0.2	0.12	0.16
2	1	0.16	0.136	0.0816	0.2688
3	1	0.2688	0.09248	0.055488	0.342784
4	1	0.342784	0.062886	0.037732	0.393093
5	1	0.393093	0.042763	0.025658	0.427303
6	1	0.427303	0.029079	0.017447	0.450566
7	1	0.450566	0.019773	0.011864	0.466385
8	1	0.466385	0.013446	0.008068	0.477142
9	1	0.477142	0.009143	0.005486	0.484456
10	1	0.484456	0.006217	0.00373	0.48943

1-2– طرق رونغ–كوتا:

أحد العوائق في استخدام طرق أولر هو مرتبة الدقة المنخفضة ، وكي نزيد الدقة يجب علينا أن نستخدم مجالات h صغيرة وهذا ما يزيد زمن الحساب ويزيد أخطاء

التدوير. تزيد طرق رونغ كوتا الدقة عبر استخدام نقطة متوسطة في كل خطوة على المجال المحسوب.

تعتبر طرق أولر مثالاً من صف عام من طرق التقريب يدعى طرق رونغ–كوتا(إن طرق رونغ–كوتا شعبية جداً بسبب سهولة برمجتها على الحواسب) والتي تتميز بالتعبير عن الحل في حدود المشتق $f(x,y)$ ويحسب بعبارات مختلفة، في هذا اختلاف عن الحل بسلاسل تايلور الذي يتطلب العديد من المشتقات المختلفة، كلها تحسب بالعبارة نفسها.

يمكننا أن نلاحظ أن كل طرق أولر يمكن أن تكتب بالصيغة

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h[\alpha f(x_0, y_0) + \beta f(x_0+\gamma h, y_0+\delta h f_0)] \qquad \textbf{(4-11)}$$

لنرى كيف يمكن لهذه العبارة أن توافق سلسلة تايلور، يمكننا نشر تابع $f(x,y)$ لمتغيرين بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0, y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \\ & + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2} \\ & + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x \partial y} + \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$y_0 \le \eta \le y;\ x_0 \le \xi \le x$$

باستخدام هذه العبارة، لنشر $f(x_0+\gamma h, y_0+\delta h f_0)$ في المعادلة (4–30) نجد:

$$\begin{aligned} y(x) = {} & y_0 + h\alpha f(x_0, y_0) \\ & + h\beta\begin{bmatrix} f(x_0,y_0) + h\gamma\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \\ + h\delta f(x_0,y_0)\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + O(h^2) \end{bmatrix} \\ = {} & y_0 + h(\alpha+\beta) f(x_0, y_0) \\ & + h^2\beta\left[\gamma\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \delta\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right] + O(h^3) \end{aligned}$$

هذه العبارة توافق عبارة سلسلة تايلور عبر الحدود التي تحوي h^2 إذا فرضنا أن:

$$\alpha+\beta=1, \qquad \beta\alpha=0.5, \qquad \beta\delta=0.5$$

وهكذا فإن طريقتي أولر المحسنتين والمعدلتين كليهما توافق سلسلة تايلور عبر الحدود التي تتضمن h^2 ونقول أنها طرق رونغ–كوتا من الدرجة الثانية. كذلك فإن هذه المعادلة تتطلب $\gamma=\delta$.

لنفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$$y'(x)=f(x,y) \qquad ; \qquad y(0)=y_0$$

ولنقم باشتقاق طرق رونغ – كوتا . نكامل المعادلة التفاضلية على المجال $[x_n, x_{n+1}]$ وذلك لحساب y_{n+1} عند $x_{n+1}=x_n+h$ مع قيمة معلومة لـ y_n :

$$y(x_0+h)=y(x_0)+\int_{x_n}^{x_n+h} f(\tau,t)d\tau \tag{4-12}$$

تشتق طرق رونغ–كوتا بتطبيق طريقة التكامل العددي على الطرف الثاني في المعادلة (12–4) حيث ينتج لدينا طرق رونغ–كوتا من المرتبة الثانية والثالثة والرابعة.

وإذا قمنا بتقريب التكامل بقاعدة النقطة الوسطى نجد:

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hf(x_0+\frac{h}{2}, y_{mid})$$

يمكننا نشر y_{mid} حسب منشور تايلور

$$y_{mid}\approx y(x_0)+\frac{h}{2}f(x_0,y_0)$$

ونحصل على الحل بطريقة رونغ – كوتا من الدرجة الثانية بالصيغة الرياضية التالية:

$$k_1=f(x_n,y_n);$$
$$k_2=f(x_n+h, y_n+h\,k); \tag{4-13}$$
$$y(x_0+h)=y(x_0)+\frac{h}{2}(k_1+k_2)+O(h^3)$$

أما الحل بطريقة رونغ– كوتا من الدرجة الثالثة فتعطى بالصيغة الرياضية الآتية:

$$k_1 = f(x_n, y_n); \tag{4-14}$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h\,k_1}{2});$$
$$k_3 = f(x_n + h, y_n - h\,k_1 + 2\,h\,k_2);$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4\,k_2 + k_3) + O(h^4)$$
$$OR \quad y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{6}(k_1 + 4\,k_2 + k_3) + O(h^4)$$

وهكذا يمكننا الوصول لصيغة رونغ كوتا من الدرجة الرابعة في حدود الكميات المتوسطة والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{4-15}$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\,k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\,k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h\,k_3)$$

ويعبر عن الحل بطريقة رونغ كوتا من الدرجة الرابعة بالعبارة:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \frac{h}{6}[k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4] + O(h^5) \tag{4-16}$$

خوارزمية الحساب باستخدام طريقة رونغ كوتا من الدرجة الرابعة:

1. أدخل قيم x_0, y_0, h
2. احسب قيمة التابع $f(x_0, y_0)$ وأعط الناتج اسم متحول وليكن k_1.
3. احسب قيمة $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2})$ وأعط الناتج اسم متحول وليكن k_2.
4. احسب قيمة $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2})$ وأعط الناتج اسم متحول وليكن k_3.
5. احسب قيمة $f(x_0 + h, y_0 + hk_3)$ وأعط الناتج اسم متحول وليكن k_4.
6. احسب $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)]$.
7. ضع $x_0 = x_0 + h, y_0 = y_1$ ثم أعد الخطوات من 1 حتى 7 إلى أن ينتهي المجال المعطى.

حل المثال 3 باستخدام طريقة رونغ – كوتا من الدرجة الرابعة

t	h	I0	k1	k2	k3	k4	I
1	1	0.0000	0.2000	0.1600	0.1680	0.1328	0.1648
2	1	0.1648	0.1341	0.1073	0.1126	0.0890	0.2753
3	1	0.2753	0.0899	0.0719	0.0755	0.0597	0.3493
4	1	0.3493	0.0603	0.0482	0.0506	0.0400	0.3990
5	1	0.3990	0.0404	0.0323	0.0339	0.0268	0.4323
6	1	0.4323	0.0271	0.0217	0.0227	0.0180	0.4546
7	1	0.4546	0.0182	0.0145	0.0153	0.0121	0.4696
8	1	0.4696	0.0122	0.0097	0.0102	0.0081	0.4796
9	1	0.4796	0.0082	0.0065	0.0069	0.0054	0.4863
10	1	0.4863	0.0055	0.0044	0.0046	0.0036	0.4908

مثال4: تسقط قذيفة لها شكل كرة كتلتها $m=10^{-2}\,kg$ تحت تأثير ثقلها ومقاومة الهواء ، تعطى معادلة تغير الدفع بتغير الزمن بالعلاقة:

$$\frac{dp}{dt}=mg-kv^2,$$

حيث m كتلة القذيفة، $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$ تسارع الجاذبية الأرضية، k ثابت مقاومة الهواء ، وقد وجد أنه يساوي $k=10^{-4}\,kg/m$ من أجل كرة كتلتها $m=10^{-2}\,kg$.

باعتبار $p=mv$. استخدم طريقة رونغ – كوتا من الدرجة الرابعة لإيجاد سرعة الكرة . نعتبر الكرة منطلقة من السكون بوصفها تابعاً للزمن من أجل $0<t<10\ s$.

الحل: نكتب المعادلة بالشكل $\frac{dv}{dt}=9.8-0.01\,v^2,$ ،ونجد بالحل أن سرعة الكرة

31.1846m/s

h	V_0	t	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$
1	0.000	0	9.800	9.560	9.572	8.884	9.491
1	9.491	1	8.899	7.857	7.999	6.741	17.383
1	17.383	2	6.778	5.485	5.750	4.449	22.999
1	22.999	3	4.510	3.422	3.694	2.675	26.569
1	26.569	4	2.741	1.994	2.201	1.523	28.678
1	28.678	5	1.576	1.118	1.252	0.842	29.871
1	29.871	6	0.877	0.613	0.693	0.458	30.529
1	30.529	7	0.480	0.333	0.378	0.248	30.887
1	30.887	8	0.260	0.179	0.204	0.133	31.081
1	31.081	9	0.140	0.096	0.110	0.072	31.185

الحل بلغة الفورتران باستخدام طريقة رونغ كوتا من المرتبة الرابعة

```
   INTEGER COUNT
   COUNT=0
   WRITE(*,10)
10 FORMAT(1X'SOLVE DIFFERENTIAL EQUATION  ',\)
   WRITE(*,20)
20 FORMAT('BY FOURTH ORDER RUNGE KUTTA METHOD.')
   WRITE(*,*)
   WRITE(*,*)'ENTER THE INITIAL VALUES:'
   READ(*,*)X1,Y1
   WRITE(*,*)'FUNCTION VALUE IS TO BE FOUND:'
   READ(*,*)A
   WRITE(*,*)'ENTER THE NUMBER OF SUBINTERVALS:'
   READ(*,*)N
   H=(A-X1)/N
   WRITE(*,*)'FUNCTION VALUES ARE AS FOLLOWS: '
   WRITE(*,*)
   WRITE(*,30)
30 FORMAT(8X,' X ',5X,' F(X) ')
   WRITE(*,40)X1,Y1
40 FORMAT(1X,F10.4,F10.4)
50 S1=F(X1,Y1)
```

```
      S2=F(X1+H/2,Y1+S1*H/2)
      S3=F(X1+H/2,Y1+S2*H/2)
      S4=F(X1+H,Y1+S3*H)
      Y2=Y1+(S1+2*S2+2*S3+S4)*H/6
      X2=X1+H
      WRITE(*,40)X2,Y2
      COUNT=COUNT+1
      IF(COUNT.LT.N)THEN
      X1=X2
      Y1=Y2
      GOTO 50
      ENDIF
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,60)X2,Y2
   60 FORMAT(1X,'THE VALUE AT ',F10.4,' IS :',F10.4)
      STOP
      END
      FUNCTION F(X,Y)
      F=9.8-0.01*Y*Y
      RETURN
      END
```

الحل بلغة الفورتران باستخدام طريقة رونغ كوتا من المرتبة الثانية

```
      INTEGER COUNT
      REAL K1,K2
      COUNT=0
      WRITE(*,10)
   10 FORMAT(1X,' SOLVE  DIFFERENTIAL EQUATION USING',\)
      WRITE(*,20)
   20 FORMAT('SECOND ORDER RUNGE KUTTA METHOD.')
      WRITE(*,*)'ENTER THE INITIAL VALUES:'
      READ(*,*)X1,Y1
      WRITE(*,*)' FUNCTION VALUE IS TO BE FOUND:'
      READ(*,*)A
      WRITE(*,*)'ENTER THE NUMBER OF SUBINTERVALS:'
      READ(*,*)N
      H=(A-X1)/N
      WRITE(*,*)'X AND CORRESPONDING FUNCTION VALUE:'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,30)
   30 FORMAT(8X,' X ',5X,' F(X) ')
      WRITE(*,40)X1,Y1
   40 FORMAT(1X,F10.4,F10.4)
   50 K1=H*F(X1,Y1)
```

```
      K2=H*F(X1+H,Y1+K1)
      Y2=Y1+(K1+K2)/2
      X2=X1+H
      WRITE(*,40)X2,Y2
      COUNT=COUNT+1
      IF(COUNT.LT.N) THEN
      X1=X2
      Y1=Y2
      GOTO 50
      ENDIF
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,60)X2,Y2
60    FORMAT(1X,'FUNCTION VALUE AT X=',F10.4,'IS:',F10.4)
      STOP
      END
      FUNCTION F(X,Y)
      F=9.8-0.01*Y*Y
      RETURN
      END
```

2-المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

غالباً ما تظهر المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية في المسائل الفيزيائية مثلاً المعادلة:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t) \qquad (4\text{-}17)$$

تمثل هذه المعادلة حركة جملة ميكانيكية مهتزة تحتوي على نابض له ثابت صلابة k ويحمل كتلة m ويفرض أن التخامد يتناسب مع السرعة، و $f(t)$ قوة خارجية ، وغالباً ما تكون $x'(t_0)$ و $x(t_0)$ معروفة عند اللحظة t_0. لإيجاد حل لأمثال هذه المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية نقوم بإعادة صياغتها على شكل جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى، وذلك باستخدام التبديل

$$x'(t) = y(t), \quad x''(t) = y'(t) \qquad (4\text{-}18)$$

وتصبح المعادلة التفاضلية وكأنها جملة معادلتين تفاضليتين

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (4\text{-}19)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

A. حل جملة من المعادلات التفاضلية بطرق رونغ – كوتا:

لنفترض أن لدينا جملة معادلتين تفاضليتين حيث:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{4-20}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

إن حل هذه الجملة هو زوج من التوابع المشتقة $x(t), y(t)$ نستبدل $x(t), t, y(t)$ في $f(t, x, y), g(t, x, y)$ وتكون النتيجة مكافئة للمشتق $x'(t), y'(t)$ بالتتالي أي:

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \qquad ; x(t_0) = x_0$$

$$y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \qquad ; y(t_0) = y_0 \tag{4-21}$$

نستطيع إيجاد الحل العددي للمعادلتين (4–20) على المجال $a \le t \le b$ إذا فرضنا أن

$$dx = f(t, x, y)dt, \ dy = g(t, x, y)dt \tag{4-22}$$

ومن ثم يمكننا الحل بإحدى طرق الحل السابقة:

A –2 . طريقة رونغ – كوتا من الدرجة الرابعة:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \tag{4-23}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),$$

$$f_1 = f(t_k, x_k, y_k),$$

$$f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1)$$

$$f_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2)$$

$$f_4 = f(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3)$$

$$g_1 = g(t_k, x_k, y_k),$$
$$g_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1)$$
$$g_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2)$$
$$g_4 = f(t_k + h, x_k + hf_3, y_k + hg_3)$$

A-3 طريقة أولر:

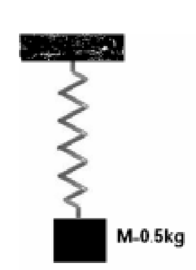
نستبدل المشتقات $dt = t_{k+1} - t_k, dx = x_{k+1} - x_k \ \& \ dy = y_{k+1} - y_k$ بالعلاقة (4-40) فنحصل على:

$$x_{k+1} - x_k \approx f(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k) \qquad (4\text{-}24)$$
$$y_{k+1} - y_k \approx g(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k)$$

نقسم المجال إلى M مجال جزئي عرضه $h = \frac{(b-a)}{M}$ وتكون الخطوة $t_{k+1} = t_k + h$. نستعمل هذا في المعادلة (4-25) للحصول على صيغة طريقة أولر

$$t_{k+1} = t_k + h \qquad (4\text{-}26)$$
$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + hg(t_k, x_k, y_k)$$

من أجل $k = 0,1,2,.......M-1$



مثال 5: كتلة معدنية ذات شكل مكعب كتلتها $M = 0.5kg$ ثبتت في نهاية نابض مهمل الكتلة. ثبتت النهاية العلوية للنابض إلى السقف . يتعرض النابض لمقاومة من الهواء تعطى بالعلاقة $R = -B\frac{dy}{dt}$ ، حيث B ثابت التخامد.

معادلة الحركة تعطى بالعلاقة $y(0) = 1, \ y'(0) = 0$ $\quad M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = 0,$

حيث y هي الازاحة ، $k = 100\frac{kg}{s^2}$ ثابت صلابة النابض و $B = 10\frac{kg}{s}$.

والمطلوب: 1− احسب $y(t)$ من أجل $0 < t < 0.05$ باستخدام طريقة رونغ − كوتا من الدرجة الثانية وبخطوة $h = 0.025$.

2− ارسم المخطط التدفقي لحساب $y(t)$ من أجل $0 < t < 0.05$ باستخدام طريقة رونغ − كوتا من الدرجة الثانية وبخطوة $h = 0.001$

الحل: نفترض أن $y' = z \equiv f(y, z, t)$ ، $y(0) = 0$ عندئذ يمكننا أن نكتب معادلة الحركة بالشكل:

$$z' = -\frac{B}{M} z - \frac{k}{M} y \equiv g(y, z, t), \qquad z(0) = 0$$

نبدل قيمة $\frac{B}{M} = 20$ وقيمة $b = \frac{k}{M} = 200$ و $g = 0$

وتكون جملة المعادلتين $z' = g(y, z, t) = -20\,z - 200\,y$

و $y' = f(y, z, t) = z$

1− من أجل $t = 0.025, n = 1$

$$k_1 = hf(y_0, z_0, t_0) = hz_0 = 0.025(0) = 0$$
$$I_1 = hg(y_0, z_0, t_0) = h(-20z_0 - 200y_0)$$
$$= 0.025(-20(0) - 200(1)) = -5$$
$$k_2 = hf(y_0 + k_1, z_0 + I_1, t_0) = h(z_0 + I_1)$$
$$= 0.025(0 - 5) - 0.125$$
$$I_2 = hg(y_0 + k_1, z_0 + I_1, t_1)$$
$$= h[-20(z_0 + I_1) - 200(y_0 + k_1)]$$
$$= 0.025[-20(0 - 5) - 200(1 + 0)] = -2.5$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(0 - 0.125) = 0.9375$$
$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(-5 - 2.5) = -3.75$$

2− من أجل $t = 0.05, n = 2$

$$k_1 = hf(y_1, z_1, t) = hz_1$$
$$= 0.025(-3.75) = -0.09375$$
$$I_1 = hg(y_1, z_1, t_1) = h(-20\,z_1 - 200\,y_1)$$
$$= 0.025(-20(-3.75) - 200(0.9375)) = -2.8125$$

$$k_2 = hf(y_1 + k_1,\ z_1 + l_1,\ t) = h(z_1 + l_1)$$

$$= 0.025(-3.75 - 2.8125) = 0.1640625$$

$$l_2 = hg(y_1 + k_1,\ z_1 + l_1,\ t)$$

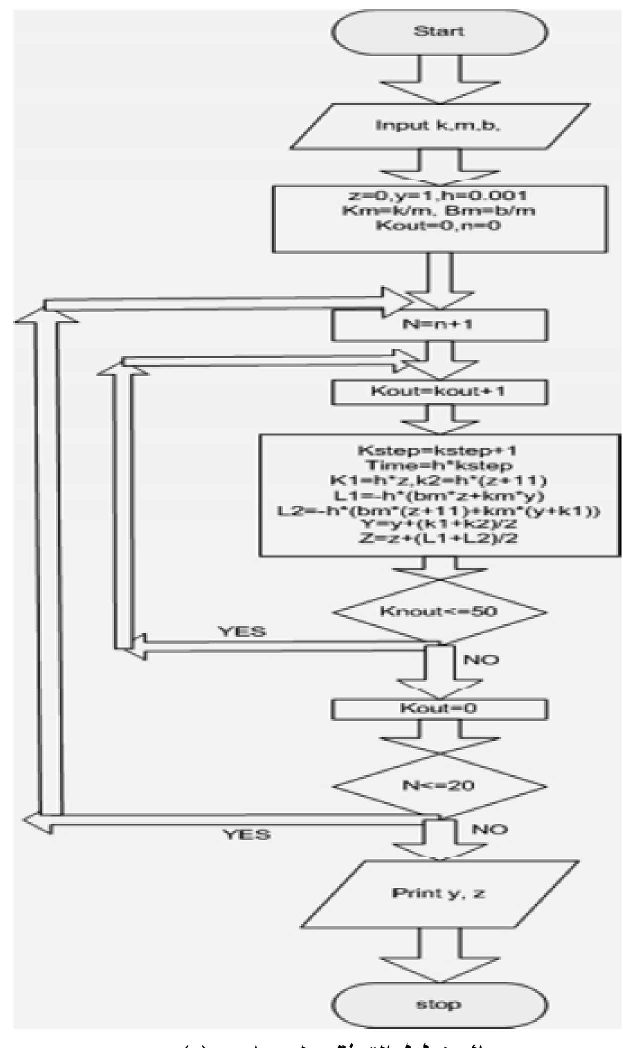
$$= h[-20(z_1 + l_1) - 200(y_1 + k_1)]$$

$$= 0.025[-20(-3.75 - 2.8125) - 200(0.9375 - 0.093750)]$$

$$= -0.9375$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(-0.09375 - 0.1640625) = 0.80859$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}(-2.8125 - 0.9375) = -5.625$$



المخطط التدفقي لحساب $y(t)$

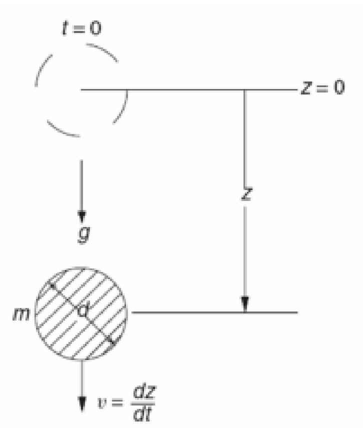
تطبيق(1): السقوط الحر لجسم كروي

قيل أن جاليلو ترك جسمين لهما كتلتان مختلفتان بآن واحد من برج بيزا المائل ووجد أنهما لمسا الأرض في اللحظة نفسها. فإذا كان جاليلو قد أنجز هذه التجربة، فهل النتيجة التي وصل إليها جاليلو في تجربته صحيحة؟ بالتأكيد إنها صحيحة في الفراغ، لكن في الغلاف الجوي، هناك قوى تؤثر على الجسم من الهواء المحيط والتي تحدد بحجم وحركة الجسم. وتبدو النتيجة مشكوك فيها. فإذا كانت خاطئة فأي جسم سيلمس الأرض أولا؟ الجسم الأكبر أم الأصغر ؟

للإجابة على هذا السؤال، سوف نلجأ إلى دراسة حركة الجسم متضمنة القوى المؤثرة عليه من الهواء المحيط ، ثم سننجز التجربة عددياً.

اخترنا المحور z ليكون باتجاه الجاذبية الأرضية g ، بحيث يكون مركز الإحداثيات هو مركز الكرة في اللحظة $t = 0$، في اللحظة $t > 0$ تكون الكرة التي لها قطر d وكتلة m على بعد z من المركز ولها سرعة v ، تحاط هذه الكرة بالهواء الذي له كثافة ρ_f وله لزوجة حركية μ. لايؤثر على الكرة في الفراغ إلا قوة الجاذبية mg ، تتأثر الكرة بسبب حركتها عبر الهواء بالقوى الإضافية التالية:

1- قوة الطفو : بحسب مبدأ أرخميدس تكون قوة الطفو مساوية إلى وزن السائل المزاح من قبل الجسم $m_f g$ حيث $m_f = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_f$ وتشير



تجربة السقوط الحر لكرة

الإشارة السالبة إلى أن اتجاه هذه القوة عكس اتجاه المحور z.

2- قوة تسارع الجسم : عندما يوضع جسم في سائل مستقر يبدأ فجأة بالحركة، تتولد الطاقة الحركية للسائل المتحرك بحركة الجسم بعكس قوة المقاومة. توجد هذه القوة حتى لو كان الجسم عديم الاحتكاك ولها القيمة $-\frac{1}{2} m_f \frac{dv}{dt}$

3- القوى الناتجة عن اللزوجة: توجد منطقة ذات سراع متغيرة حول جسم يتحرك عبر سائل حقيقي، وتكون مجاورة لسطح الجسم، يسبب تدرج السرعة إجهاداً على السطح، تسمى القوة الناتجة عن هذا الاجهاد قوة الاحتكاك السطحية. يصبح الضغط بالقرب من الجسم المغموس في سائل لزج أخفض منه في مقدمة الجسم، وهو ما يسبب نشؤ عائق ناتج عن شكل الجسم. ويعبر عنه أحياناً من دون أبعاد ويدعى بثابت الإعاقة وهو تابع لشكل الجسم وأعداد رينولد Reynold ، ماعدا بعض الأشكال البسيطة وأعداد رينولد منخفضة. وهذا التابع من الصعب إيجاده تحليلياً! ويحدد عادة تجريبياً.

4- عائق الموجة: عندما تصبح سرعة الجسم مقاربة لسرعة الصوت في الوسط السائل قد تنشأ موجة صدم أمام الجسم تدعى (عائق الموجة). إذا أخذنا بعين الاعتبار السرعات المنخفضة بالنسبة لسرعة الصوت، يمكننا أن نحذف عائق الموجة (يمكن إهماله).

وهكذا يصبح قانون نيوتن للحركة مطبقاً على جسم كروي له الشكل.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - m_f g - \frac{1}{2} m_f \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \rho_f v|v| \frac{\pi}{4} d^2 c_d(v)$$

استعملت $v|v|$ بدلاً من v^2

إذاً اتجاه عائق اللزوجة معاكس دوماً لاتجاه v. ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$\left(m + \frac{1}{2} m_f\right) \frac{dv}{dt} = (m - m_f)g - \frac{\pi}{8} \rho_f v|v| \frac{\pi}{4} d^2 c_d(v)$$

يشير الطرف الأيسر إلى أنه في الحركة المتسارعة أو المتباطئة عبر السائل يتصرف الجسم وكأن كتلته قد ازدادت . ويعرف الحد $\frac{1}{2}m_f$ أحياناً باسم الكتلة المضافة.

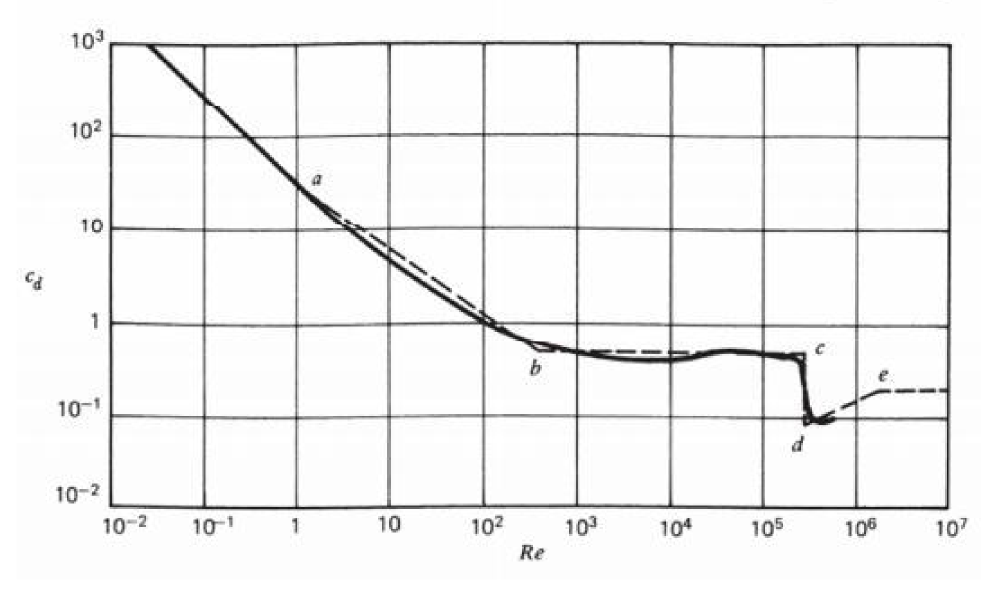
وباستبدال الحد $m = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho$ تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A}[\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}v|v|c_d(v)$$

$$\frac{dz}{dt} = v$$

حيث $A = 1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}$ ، $B = (1-\bar{\rho})g$ ، $C = \frac{3\bar{\rho}}{4d}$ ، $\bar{\rho} = \frac{\rho_f}{\rho}$

يمكن حل هذه المعادلات باستخدام طرق رونغ _كوتا أو غيرها، ولكن نحتاج إلى عناية خاصة بالنسبة للحد في الحساب العددي، حيث أظهرت التجربة المنحني التالي من أجل كرة ناعمة حيث معامل الإعاقة c_d يحدد بقسمة قوة اللزوجة على $\frac{1}{2}\rho_f v^2 \frac{\pi}{4} d^2$ والرسم بدلالة أعداد رينولد R_e



يظهر الشكل قيم المعامل c_d بدلالة أعداد رينولد

نقسم المنحني إلى عدة خطوط منكسرة إلى يسار النقطة a حيث $R_e \le 1$ تستعمل عبارة ستوكس $c_d = \frac{24}{R_e}$، ومابين النقطتين a و b حيث $R_e = 400, c_d = 0.51$ نجد

$c_d = \frac{24}{R_e^{0.646}}, 1 < R_e \leq 400$.

مابين b و c حيث $R_e = 3 \times 10^3$ نعتبر أن معامل الإعاقة له القيمة 0.5 .

الانخفاض المفاجئ حول c هو مؤشر إلى الانتقال إلى الحالة المضطربة قبل أن ينفصل السائل عن سطح الجسم.

رسم خط مستقيم آخر بين d $(R_e = 3 \times 10^3, c_d = 0.08)$ و e حيث $(R_e = 2 \times 10^6, c_d = 0.18)$ ومن ثم:

$c_d = 0.000366 R_e^{0.4275}$, من أجل $3 \times 10^5 < R_e \leq 2 \times 10^6$

وأخيراً في منطقة أعداد رينولد الكبيرة بعد النقطة e نفترض قيمة ثابتة 0.18 لعامل الإعاقة.

ولنفرض أنه في تجربتنا كانت الكرات المرمية من الفولاذ وبشروط جوية مناسبة عند سطح البحر $g = 9.8 \frac{m}{s^2}, \nu = 1.49 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

$$, \rho_f = 1.22 \frac{kg}{m^3}, \rho = 8000 \frac{kg}{m^3}$$

بسبب انخفاض قيمة في مثالنا هذا نهمل تأثير الطفو والكتلة المضافة، ولنفترض أن الكرة لها قطر 0.01 .

سنختار القيم الابتدائية $t_0 = 0, \ z_0 = 0, v_0 = 0$ وباستخدام طريقة رونغ_كوتا من الدرجة الرابعة حيث:

$$\Delta_1 z_i = h v_i$$
$$\Delta_1 v_i = h F(v_i)$$
$$\Delta_2 z_i = h\left(v_i + \tfrac{1}{2}\Delta_1 v_i\right)$$
$$\Delta_2 v_i = h F\left(v_i + \tfrac{1}{2}\Delta_1 v_i\right)$$
$$\Delta_3 z_i = h\left(v_i + \tfrac{1}{2}\Delta_2 v_i\right)$$
$$\Delta_3 v_i = h F\left(v_i + \tfrac{1}{2}\Delta_2 v_i\right)$$
$$\Delta_4 z_i = h(v_i + \Delta_3 v_i)$$
$$\Delta_4 v_i = h F(v_i + \Delta_3 v_i)$$

التي تمكننا من حساب القيم الجديدة :

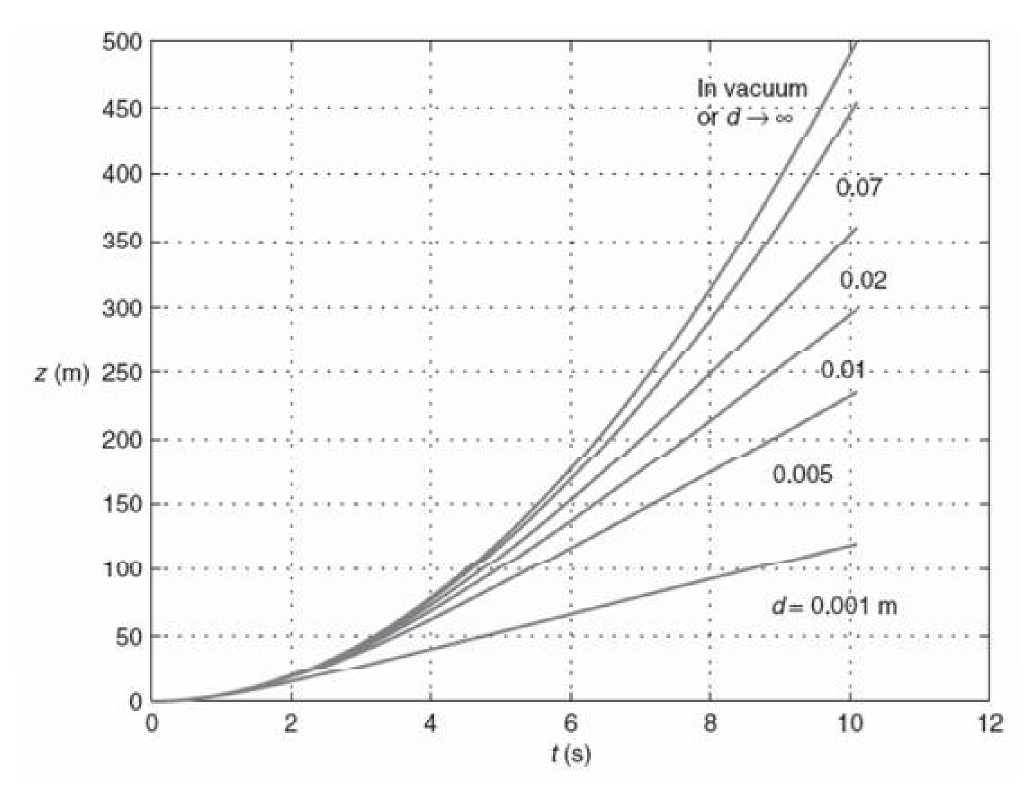
$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 z_i + 2\Delta_2 z_i + 2\Delta_3 z_i + \Delta_4 z_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 v_i + 2\Delta_2 v_i + 2\Delta_3 v_i + \Delta_4 v_i)$$

و الحل باستخدام برنامج FORTRAN

```
COMMON A, B, C,D, NU,R
DOUBLE PRECISION RHOBAR,RE ,NU,D
REAL V,Z,ZV,VV,D1Z,D1V,D2Z,D2V,D3Z,D3V,D4Z,D4V
T0 = 0.0
Z0 = 0.0
V0 = 0.0
RHO = 8000.0
RHOF = 1.22
G = 9.8
H = 0.1
TMAX = 10.0
RHOBAR = RHOF/RHO
NU = 0.0000149
A = 1.+RHOBAR/2.
B = (1.-RHOBAR)*G
D = 0.01
C = 3.*RHOBAR/(4.*D)
T = T0
Z = Z0
V = V0
RE = V*D/NU
WRITE(*,*)' T   Z(IN VACUUM)  Z    V(IN VACUUM)  V     RE'
WRITE(*,*)'(SEC)     (M)      (M)     (M/SEC)   (M/SEC)   '
N=1
DO 10 T=T0,TMAX,H
R = abs(V)*D/NU
IF (R.EQ.0.) THEN
        CD=0.
    ELSEIF (R.GT.0..AND. R.LE.1.)THEN
        CD=24./R
    ELSEIF (R.GT.1.0 .AND. R.LE.400.)THEN
        CD=24./R**0.646
    ELSEIF (R.GT.400.0 .AND. R.LE.3.0E+5) THEN
        CD=0.5
    ELSEIF (R.GT.3.0E+5 .AND. R.LE.0.0E+6)THEN
        CD=(3.66E-4)*R**0.4275
    ELSEIF (R.GT.2.0E+6)THEN
        CD=0.18
ENDIF
```

```
      ZV = Z0 + V0*T + G*T*T/2.
      VV = V0 + G*T
  WRITE(*,2)T,ZV,Z,VV,V,RE
2 FORMAT(6E10.4)
      D1Z = H*V
      D1V = H*F(V)
      D2Z = H*(V + D1V/2.)
      D2V = H*F(V+D1V/2.)
      D3Z = H*(V + D2V/2.)
      D3V = H*F(V+D2V/2.)
      D4Z = H*(V + D3V)
      D4V = H*F(V+D3V)
      N=N+1
      Z = Z + (D1Z + 2.*D2Z + 2.*D3Z + D4Z)/6.
      V = V + (D1V + 2.*D2V + 2.*D3V + D4V)/6.
      RE = V*D/NU
10  CONTINUE
    END
    REAL FUNCTION  F(W)
    COMMON A, B, C,D,CD
    F = (B-C*W*ABS(W)*CD)/A
    RETURN
    END FUNCTION
```



موضع الكرة الفولاذية الساقطة في الهواء

تطبيق(2): معادلات النجم النيوتروني

دفع اكتشاف شادويك Chadwick للنيترون في العام 1932 للتنبؤ بوجود النجوم النيوترونية. اقترح ولادة مثل هذه النجوم في الانفجارات العظيمة من قبل باد و زويكي bade & zwicky 1934. عندما ينكمش وينهار قلب نجم عملاق جبار، خلال حادثة المستعرة الحرارية الفائقة السوبرنوفا، تشكل بقية منه نجما نترونياً صغيراً يحمل معه مجمل الاندفاع الدوراني. لذلك ينبغي على النجم النتروني أن يدور بسرعة عالية جداً ، مما يؤدي لإطلاق نبضات منتظمة من الضوء عند دورانها بسبب الحقل المغناطيسي الهائل الذي يتولد عن بقايا الانفجار الأعظم، تدعى هذه النجوم باسم النجوم النباضة (البلزرات). أنجزت الحسابات النظرية للنجم النيوتروني من قبل تولمان Tolman ، وأوبنهايمر وفولكوف Openheimer&Volkoff 1939 ومن قبل ويلر Wheelr عام 1960 . أول من اكتشف النجم النيوتروني هو بل و هويش Bell&Hewish في العام 1967. لحظت البلزارات السرطانية سريعة الدوران في بقايا الانفجار العظيم في برج

السرطان من قبل الصينيين في العام 1054 بعد الميلاد. وقد ثبت ارتباطه بالانفجار الأعظم. تدور النجوم النباضة الراديوية بسرعة عالية بأدوار تتراوح بين $0.033s \le p \le 0.4s$. يعتقد أنها تأخذ طاقتها من الخسارة في الطاقة الدورانية، وأنها تلف حول ذاتها بسرعة بدور من مشتقات $\dot{P} \sim 10^{-12} - 10^{-16}$. يقود الحقل المغناطيسي المرتفع B لهذه النجوم النباضة إلى اشعاع كبح ثنائي القطب المغناطيسي والذي يتناسب مع مربع شدة الحقل المغناطيسي. تقدر شدة الحقل المغناطيسي بحوالي $B \sim 10^{11} - 10^{12}\, G$. يقدر العدد الكلي من النجوم النباضة المكتشفة حتى العام 2000 بألف نجم نباض وهو في تزايد دائم.

تقدم فيزياء الأجسام المضغوطة، مثل النجوم النيوترونية، تداخلات مثيرة للاهتمام بين الفيزياء النووية والمشاهدات الفلكية. تخضع النجوم النيوترونية لشروط بعيدة تماماً عما هو موجود في الأرض، مثل الكثافة المتوقعة ρ لداخل النجم النيوتروني وهي من مرتبة 10^{14} أي أكبر بألف مرة من كثافة السائل النيوتروني $\rho_d \approx 4.10^{11}\, g/cm^3$ حيث تتفكك الأنوية وتندمج معاً عند هذه الكثافة. وهكذا فإن تحديد معادلة الحالة (EoS) هي أمر أساسي من أجل حسابات خواص النجم النيوتروني. تحدد معادلة الحالة خواص مثل مجال الكتلة، العلاقة بين نصف القطر– الكتلة. سماكة القشرة، ومعدل التبريد. معادلات الحالة هذه نفسها ذات أهمية كبرى من أجل حساب الطاقة المتحررة في انفجار السوبرنوفا.

من الواضح أن عدد درجات الحرارية سيختلف في منطقة القشرة من النجم النيوتروني، حيث الكثافة أصغر بكثير من كثافة إشباع المادة النووية. وفي مركز النجم حيث الكثافة مرتفعة جداً فإن النماذج تعتمد كلياً على النكليونات المتفاعلة.

تتضمن نماذج النجم النيوتروني معادلات حالة حقيقية مختلفة تنتج من الصورة العامة لداخل النجم النيوتروني. تتضمن المنطقة السطحية ذات الكثافة $10^6\, g/cm^3 < \rho < 4.10^{11}\, g/cm^3$ منطقة صلبة حيث توجد شبكة من النوى الغنية بالنيوترونات مع غاز فائق السيولة من النيوترونات والغاز الالكتروني. يحتوي السائل النيوتروني من أجل $2.10^{14}\, g/cm^3 < \rho < 10^{15}\, g/cm^3$ بشكل

أساسي على نيوترونات فائقة السيولة مع تركيز خفيف من البروتونات فائقة الناقلية والالكترونات العادية. عند كثافات أعلى، تقريباً، 2–3 مرات من كثافة المادة النووية الانتقالات الطورية الهامة من طور مع درجات حرية للنيكليونات فقط إلى المادة الكواركية التي قد تؤخذ (بعين الاعتبار) ،أكثر من ذلك، قد يكون لدينا طور مختلط من الكوارك والمادة النووية، كثافة حالة الكاوون أو البيون، أو المادة الهيبرونية، الحقل المغناطيسي القوي في النجوم الشابة...الخ.

معادلات التوازن:

إذا كان النجم في حالة توازن حراري، فإن قوة الجاذبية على كل عنصر حجم ستكون في توازن مع القوة الناتجة عن تغير موضع الضغط p . يحدد الضغط بمعادلة الحالة مثلاً في حالة الغاز المثالي $P = NK_BT$ ، قوة الجاذبية التي تؤثر على عنصر الحجم عند البعد r تعطى بالعلاقة:

$$F_{Grav} = -\frac{Gm}{r^2}\rho/c^2,$$

حيث G ثابت الجاذبية، $\rho(r)$ كثافة الكتلة،

$m(r)$ هي الكتلة الكلية داخل نصف القطر r وتعطى بالعلاقة:

$$m(r)=\frac{4\pi}{c^2}\int_0^r \rho(r')r'^2\,dr'$$

والتي تعطي زيادة إلى المعادلة التفاضلية للكتلة والكثافة

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)/c^2$$

حين يكون النجم في حالة توازن يكون لدينا

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)/c^2$$

المعادلة الأخيرة تعطينا معادلتين تفاضليتين مقترنتين من الدرجة الأولى، وهي تحدد بنية النجم النيوترونى حين تكون معروفة.

الشروط الذاتية تبين أن الكتلة يجب أن تكون مساوية للصفر في مركز النجم، عندما $r=0$ لدينا $m(r=0)=0$ ، الشروط الأخرى هي أن الضغط ينعدم على

سطح النجم. هذا يعني أنه عند النقطة $p=0$ في حلول المعادلات التفاضلية نحصل على نصف القطر R للنجم والكتلة الكلية $m(r=R)$. كثافة الكتلة عندما $r=0$ تدعى الكثافة المركزية ρ_s . وحيث إن الكتلة النهائية M ونصف القطر الكلي R يتعلقان بقيمة ρ_s ، فإن تغير هذه الكمية يسمح لنا بدراسة نجوم بكتل مختلفة وأنصاف أقطار مختلفة.

المعادلات بلا أبعاد:

عندما نحاول إيجاد الحل العددي، فإننا نحتاج إلى إعادة تدريج المعادلة التي نتعامل معها لكي تصبح من دون أبعاد. ولكي نفهم لماذا، نفترض أن ثابت الجاذبية G والكتلة النهائية المحتملة $m(r=R)=M_R$ ، الكتلة الأخيرة هنا هي بشكل طبيعي من رتبة بعض الكتل الشمسية M_Θ .

إذا أردنا أن نحول الأخيرة إلى واحدة MeV/c^2 فسوف يكون لدينا $M_R \sim 10^{60}\,MeV/c^2$ ثابت الجاذبية $G=6.67\times10^{-45}(MeV/c^2)^{-2}$.

من السهل عندئذ أن ترى أن تضمين قيم هذه الكميات في معادلاتنا سوف يؤدي إلى أخطاء تدوير عالية وذلك عندما نضيف عدداً كبيراً $\frac{dp}{dt}$ إلى عدد صغير p وذلك للحصول على الضغط الجديد.

جدول يبين واحدات الكميات المختلفة وقيمها.

الكمية	الواحدة
$[P]$	$\mathrm{MeVfm^{-3}}$
$[\rho]$	$\mathrm{MeVfm^{-3}}$
$[n]$	$\mathrm{fm^{-3}}$
$[m]$	$\mathrm{MeVc^{-2}}$
M_Θ	1.989×10^{30} Kg= $1.1157467\times10^{60}\ \mathrm{MeVc^{-2}}$
1 Kg	$=10^{30}/1.78266270D0\ \mathrm{MeVc^{-2}}$
$[r]$	m
G	$\hbar c 6.67259\times10^{-45}\ \mathrm{MeV^{-2}c^{-4}}$
$\hbar c$	197.327 MeVfm

الأقواس المربعة $[p]$ وضعت من أجل الواحدة للكمية داخل الأقواس.

نقدم كميات من دون أبعاد لنصف القطر $\bar{r} = r / R_0$ ، كثافة كتلة الطاقة $\bar{\rho} = \rho / \rho_s$ ، الضغط $\bar{P} = P / \rho_s$ والكتلة $\bar{m} = m / M_0$.

يمكن تحديد الثوابت R_0, M_0 من متطلبات كون المعادلتين لـ $\frac{dm}{dr}$ و $\frac{dp}{dr}$ يجب أن تكونا من دون أبعاد وهذا يعطي $\frac{dM_0\bar{m}}{dR_0\bar{r}} = 4\pi R_0^2 \bar{r}^2 \rho_s \bar{\rho}$ و

$$\frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = \frac{4\pi R_0^3 \bar{r}^2 \rho_s \bar{\rho}}{M_0}$$

إذا وجب أن تكون هذه المعادلات من دون أبعاد يجب أن يكون $\frac{4\pi R_0^3 \rho_s}{M_0} = 1$

وبشكل مماثل نحصل من أجل معادلة الضغط $\frac{d\rho_s \bar{P}}{dR_0 \bar{r}} = -GM_0 \frac{\bar{m}\rho_s \bar{\rho}}{R_0^2 \bar{r}^2}$

وحيث إن هذه المعادلة يجب أن تكون بلا أبعاد فنحصل على $\frac{GM_0}{R_0} = 1$

وهذا يعني أن الثابتين R_0 و M_0 الذين يؤديان إلى عدم وجود أبعاد للمعادلات هما:

$$M_0 = \frac{4\pi\rho_s}{\left(\sqrt{4\rho_s G\pi}\right)^3} \quad \text{و} \quad R_0 = \frac{1}{\sqrt{4\rho_s G\pi}}$$

وحيث إننا نرغب في الحصول على نصف قطر معبر عنه بواحدات $10\ km$، فيجب أن نضرب R_0 بـ 10^{-19}، حيث إن $1\ fm = 10^{-15}\ m$، وبشكل مشابه M_0 سوف تكون بواحدات $\frac{MeV}{c^2}$ ولذا فمن المناسب أن نقسمها على كتلة الشمس، ونعبّر عن الكتلة الكلية في واحدات الكتلة الشمسية $M_\odot$ وتكون المعادلات التفاضلية عندئذ:

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = -\frac{\bar{m}\bar{\rho}}{\bar{r}^2} \quad ، \quad \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = \bar{r}^2 \bar{\rho}$$

نفترض عند حل هذه المسألة أن الكثافة $\rho(n)$ تعطى بالعلاقة:

$$\rho(n) = 236 \times n^{2.54} + n m_n ,$$

و $n = N / V$ حيث N العدد الكلي للباريونات في الحجم .

عندما $m_n = 938.926 MeV/c^2$ حيث m_n متوسط كتلة النيوترون

وبما أن $[n] = fm^{-3}$ فيكون بعد ρ هو $[\rho] = MeV/c^2\ fm^{-3}$.

من خلال العلاقة المعروفة في الترموديناميك $P = -\dfrac{\partial E}{\partial V}$

حيث E هي الطاقة في واحدة MeV/c^2

$$P(n) = n\frac{\partial\rho(n)}{\partial n} - \rho(n) = 363.44 \times n^{2.54},$$

نلاحظ أن واحدة الضغط هي واحدة ρ نفسها.

النقطة المهمة التي يجب أخذها بعين الاعتبار عند حل جملة معادلتين تفاضليتين مقترنتين من الدرجة الأولى هي: عند الحصول على الضغط الجديد المعطى بـ $P_{new} = \dfrac{dp}{dr} + P_{old}$.

نلاحظ أنه يكون تابعاً لـ r ، وعند الحصول على هذا الضغط الجديد سوف نحتاج إلى المعادلة $P(n) = n\dfrac{\partial\rho(n)}{\partial n} - \rho(n) = 363.44 \times n^{2.54},$ وذلك لإيجاد عدد الكثافة n ،وهذا بدوره سيسمح لنا بإيجاد القيمة الجديدة لـ $\rho(n)$ عند قيمة متعلقة بـ r.

الخطوات المتبعة لحل جملة المعادلتين المقترنتين للنجم النيوتروني:

1- التأكد من أن المعادلات من دون أبعاد.

2- تحديد الثوابت R_0 و M_0 بواحدات $10\ km$ والكتلة الشمسية $M_\odot$، وإيجاد قيمهم.

3- نضع البرنامج اللازم لحل المعادلتين حيث نحدد فيه قيم الثوابت .

4- نكتب تابعاً بسيطاً يستخدم عبارتي الضغط والكثافة المعبر عنهما بالعلاقتين $P(n) = n\dfrac{\partial\rho(n)}{\partial n} - \rho(n) = 363.44 \times n^{2.54}$ و $\rho(n) = 236 \times n^{2.54} + nm_n$.

5- نكتب تابعا بسيطاً لـ $r^2\rho$ و $-\dfrac{m\rho}{r^2}$

6- نطبق طريقة رونغ – كوتا من الدرجة الرابعة (أو أي طريقة من الطرق التي سبق ذكرها) للحصول على القيم الجديدة للضغط والكتلة.

النتائج:

R_{max} $[km]$	$M(R_{max})$ $[M_{\Theta}]$	ρ_s $[MeV.fm^{-3}]$	M_{max} $[M_{\Theta}]$	$R(M_{max})$ $[km]$	ρ_s $[MeV.fm^{-3}]$
16.7	12.9	2294	24.7	13.7	23967

حيث h=0.0015

تطبيق(3): دراسة البنية الذرية بتقريب هارتري – فوك

يعرف تقريب هارتري – فوك (أو تقريب الحقل الذاتي) على أنه الوصف الدقيق للعديد من الذرات متعددة الالكترونات، يوصف كل الكترون بتابع موجي منفصل لجسيم منفرد (وكأنه منفصل عن التابع الموجي متعدد الالكترونات)، ويكون هذا التابع حلاً للمعادلة الشبيهة بمعادلة شرودنغر. ويكون الكمون الذي يظهر في هذه المعادلة هو الكمون المتوسط الناشئ عن بقية الالكترونات، ويتعلق بالتابع الموجي للجسيم المفرد لهذه الالكترونات. وهكذا ينتج لدينا مجموعة من معادلات القيم الخاصة اللاخطية والتي يمكن حلها بالطريقة آنفة الذكر . وهذا الحل يؤدي إلى تحديد الطاقة الأساسية. للجملة الكوانتية المدروسة.

أساسيات تقريب هارتري فوك:

يكتب هاملتوني N الكترون تتحرك حول نواة شحنتها Z بالعلاقة:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^{N} \frac{Ze^2}{r_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^{N} \frac{Ze^2}{r_{ij}} \qquad (4\text{-}44)$$

r_{ij} مواضع الالكترونات ، mكتلة الالكترون ، e شحنة الالكترون ،

$r_{ij} = r_i - r_j$ المسافة الفاصلة بين الالكترون i والالكترون j

يشمل المجموع الأول الطاقة الحركية للإلكترون، ويشمل المجموع الثاني تجاذب الالكترون مع النواة ، ويشمل المجموع الثالث تفاعل التدافع بين الالكترونات . وقد تم إهمال تفاعل سبين مدار والتأثيرات السبينية والحركة الارتدادية للنواة ولأنها من رتبة دقة طريقة تقريب الحقل الذاتي.

يتطلب الوصف الكوانتي تحديد الحالة السبينية لكل الكترون إضافة إلى موقعه . وهذا ما يمكننا فعله بإعطاء مسقط السبين على محور ثابت مكمم، تستخدم $\sigma_i = \pm\frac{1}{2}$ لكي نشير إلى إحداثيات الفضاء والسبين ، تمكننا طريقة الحقل المتوسط من حساب القيمة الأرضية وذلك باستخدام مبدأ التغيرات لرايلي وريتز والذي ينص على: إن التابع الموجي الخاص للسوية الأرضية للهاملتوني هو التابع الموجي $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ الذي يجعل القيمة المتوقعة لـ H أصغرية.

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle \tag{4-45}$$

بحيث يحقق مبدأ الاستبعاد لباولي ويحقق شرط التنظيم

$$\int |\psi|^2 d^N x = 1 \tag{4-46}$$

الدليل يعني أن التكامل يتم على جميع الإحداثيات الموضعية والجمع يتم على جميع الإحداثيات السبينية للالكترونات. نجعل التابع الموجي في طريقة هارتري فوك مرتبطاً بمعين سلاتر.

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (N!)^{-\frac{1}{2}} \det \psi_\alpha(x_j) \tag{4-47}$$

حيث هي ψ_αمجموعة التوابع الموجية للجسيم المفرد، وهي توابع لإحداثيات الإلكترون الفردي . المعين هو مصفوفة $N \times N$ حيث α ، x_i تأخذ كل منها قيمة محتملة، بينما $(N!)^{-\frac{1}{2}}$ لتنظيم التابع. التفسير الفيزيائي لهذا التابع الموجي هو أن التفاعل بين الالكترونات يكون ملبئاً بالتفاصيل عن حركتها.

من السهل أن نجد التابع الموجي ψ غير متناظر لتبادل الكترونين، باستخدام خواص المعينات، وكذلك أن ننظم باستخدام العلاقة (46–4) إذا كانت التوابع الموجية متوامدة.

$$\int \psi_{\alpha}^{*}(x)\psi_{\alpha'}(x)\,dx = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{4-48}$$

لايتضمن الهاملتوني (44–4) متغيراً لسبين الالكترون لذا فإن السبينات تقترن مع درجة حرية الفراغ، و من المفيد كتابة كل تابع موجي بوصفه جداء للفراغ والتابع الموجي:

$$\psi_{\alpha}(x) = \chi_{\alpha}(r)\left|\sigma_{\alpha}\right\rangle \tag{4-49}$$

حيث $\sigma_{\alpha} = \pm\frac{1}{2}$ هو مسقط السبين للمدار، عندها تصبح علاقة التوامد (48–4) بالشكل:

$$\delta_{\sigma_{\alpha}\sigma_{\alpha'}} \int \chi_{\alpha}^{*}(r)\chi_{\alpha'}(r)\,d^{3}r = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{4-50}$$

لذا فإن المدارات تكون متعامدة بارتباطها بالسبين أو الفراغ.

إن حساب الطاقة في العلاقة (45–4) باستخدام التابع الموجي المحدد بالعلاقات (47–4) – (49–4) مباشر.

وبعد إجراء بعض العمليات الجبرية:

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N} \left\langle \alpha \left| \frac{p^2}{2m} \right| \alpha \right\rangle + \int \left[-\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{r}) \right] \rho(\mathbf{r})\, d^3r - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\alpha'=1}^{N} \delta_{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha'}} \left\langle \alpha\alpha' \left| \frac{e^2}{r_{ij}} \right| \alpha'\alpha \right\rangle . \tag{4-51}$$

حيث

$$\left\langle \alpha \left| \frac{p^2}{2m} \right| \alpha \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \chi_{\alpha}^{*}(\mathbf{r}) \nabla^2 \chi_{\alpha}(\mathbf{r})\, d^3r , \tag{4-52}$$

كثافة الالكترون هي مجموع كثافات الجسيم المفرد

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} |\chi_{\alpha}(\mathbf{r})|^2 , \tag{4-53}$$

الكمون المتولد عن الالكترون هو

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')\, d^3r' , \qquad (4\text{-}54)$$

لذا

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi e^2 \rho(\mathbf{r}) , \qquad (4\text{-}55)$$

والعناصر المصفوفية المتبادلة لقوى التنافر الالكترونات هي:

$$\left\langle \alpha\alpha' \left| \frac{e^2}{r_{ij}} \right| \alpha'\alpha \right\rangle = e^2 \int \chi^*_\alpha(\mathbf{r})\chi^*_{\alpha'}(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\chi_{\alpha'}(\mathbf{r})\chi_\alpha(\mathbf{r}')\, d^3r\, d^3r' . \qquad (4\text{-}56)$$

تفسر الحدود في (51–4) كما يلي: الطاقة الحركية هي مجموع الطاقات الحركية لمدارات الجسيم المفرد، بينما تفاعل التجاذب بين الالكترون والنواة وتفاعل التنافر بين الالكترونات هو ما يمكن أن نتوقعه من الشحنة الكلية المتوزعة بكثافة في الفضاء. الحد الأخير في (51–4) هو طاقة التبادل التي تظهر من عكسية التناظر للتابع الموجي (47–4) ومجموع على الأزواج في المدارات مع مسقط السبين نفسه، لا نلحظ الأزواج في المدارات ذات مسقط السبين المختلف لذا فإنها لا تسهم في هذا الحد.

تبدو إستراتيجية الحقل الذاتي واضحة، وهي أن تغير التابع الموجي (47–4) يتعلق بمجموعة من الوسطاء، وهي قيم التوابع الموجية للجسيم المفرد عند كل نقطة في الفضاء ، وتغيير الوسطاء للحصول على الطاقة الصغرى (51–4).

حالة جملة مؤلفة من الكترونين

تكون السوية الأساسية لحركة إلكترونين لايتفاعلان مع بعضهما هي التشكيل $1S^2$ ، أي أن كلا الإلكترونين في السوية الموضعية المتناظرة كروياً نفسها، ولكن لهما مسقط سبين مختلف. التابع الموجي للجملة التي تمثل هذا التشكيل هو:

$$\psi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{1/2} r} R(r) \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle , \qquad (4\text{–}57)$$

لذا فإن التابع الموجي (47–4) يكتب بالشكل التالي:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{4\pi r_1 r_2} R(r_1)R(r_2)\left[\left| +\frac{1}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right] , \qquad (4\text{–}58)$$

هذا التابع الموجي عكسي التناظر بالنسبة للسبين وهكذا يكتب شرط التنظيم بالعلاقة:

$$\int_0^\infty R^2(r)\, dr = 1\,, \tag{4-59}$$

وتعطى الطاقة (4-51) بالعلاقة:

$$E = 2 \times \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 dr + \int_0^\infty \left[-\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{4}\Phi(r)\right]\rho(r) 4\pi r^2\, dr\,, \tag{4-60}$$

وباستخدام العلاقة (4-53) نحصل على كثافة الشحنات:

$$\rho(r) = 2 \times \frac{1}{4\pi r^2} R^2(r)\,;\ \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = 2\,, \tag{4-61}$$

وهكذا تصبح معادلة بواسون لهذه الجملة بالشكل:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = -4\pi e^2 \rho\,. \tag{4-62}$$

ويخضع الجزء القطري للعلاقة:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2}\Phi(r) - \epsilon\right] R(r) = 0\,. \tag{4-63}$$

الحل العددي:

1-نبدأ من تخمين أول للتابع الموجي (مثلاً نأخذ التابع الموجي لذرة الهيدروجين).

2-نحل معادلة بواسون (4-62) للحصول على الكمون الناتج عن التابع الموجي الابتدائي ونحسب الطاقة الكلية من العلاقة (4-61).

3-نحسب التابع الموجي الجديد بالعلاقة(4-63)، ومن ثم ننظم التابع باستخدام العلاقة (4-59).

4-نحسب الكمون الناتج عن التابع الموجي الجديد ونكرر الخطوات 2 و 3 حتى تتقارب قيم الطاقة .

تمارين

1) إذا علمت أن الكتلة البدائية لصاروخ زحل 5 والمستعمل في برنامج أبولو تساوي $2.8\times10^{6}kg$ وأن كتلة الوقود الموجود فيه لحظة الإطلاق $2.1\times10^{6}kg$ و أن متوسط قوة الدفع $37\times10^{6}N$ وسرعة الدفع $2600m/s$ احسب السرعة النهائية للصاروخ عند نهاية وقود المرحلة الأولى علماً أن كمية الوقود التي يستهلكها المحرك $14200kg$ في كل ثانية.

2) هزاز توافقي بسيط عبارة عن كتلة m معلقة بخيط طوله l معلق في مركزه تحت تأثير الثقالة g. نفترض أن الحركة خطية، أي أن الزاوية التي يصنعها النواس مع المحور الشاقولي تبقى دائما صغيره .معادلة الاهتزاز المشتقة من قانون نيوتن الثاني تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

المطلوب:

-اكتب خوارزمية الحل باستخدام طريقة اولر المعدلة و رونغ -كوتا من المرتبة الثانية لحل مسألة الهزاز التوافقي.

-احسب الزاوية، السرعة الزاوية و الطاقة بوصفها تابعا للزمن. طاقة الهزاز تعطى بالعلاقة:

$$E=\frac{1}{2}\Omega^2+\frac{1}{2}\frac{g}{l}\theta^2.$$

نأخذ القيم العددية $g=9.8m/s^2, \ell=1m$

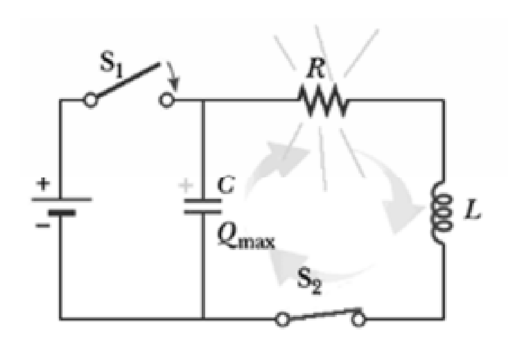
3) تعطى معادلة هزاز توافقي بالعلاقة:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\Omega^2x.$$

–اكتب حل المعادلة السابقة باستعمال خوارزمية اولر البسيطة.

-اعد السؤال السابق باستعمال خوارزمية رونغ-كوتا من المرتبة الرابعة.

3) لدينا الدارة الكهربائية المبينة بالشكل التالي:



باستخدام قوانين كيرشوف نحصل على المعادلة التالية:

$$LI\frac{dI}{dt} + I^2R + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = 0$$

وباستبدال $I = \dfrac{dQ}{dt}$ نجد المعادلة

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

المطلوب: بين كيف يمكن حل المعادلة التفاضلية الأخيرة عددياً

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية الجزئية للقوانين الفيزيائية

مقدمة:

العديد من المسائل في الفيزياء هي مسائل معادلات تفاضلية جزئية، نقول عن المعادلة التفاضلية التي تتضمن أكثر من متغير مستقل بأنها معادلة تفاضلية جزئية. تدعى المعادلة التفاضلية التي لها الشكل:

$$A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = f(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) \qquad (5.1)$$

أو

$$A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F\varphi \quad = G$$

حيث $\varphi_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$،$\varphi_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$،$\varphi_{xy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$ و A, B, C ثوابت

إذا كان

$B^2 - 4AC < 0$ تدعى معادلة تفاضلية جزئية إهليلجية (ناقصية)(ظواهر الحالة المستقرة)

$B^2 - 4AC = 0$ تدعى معادلة تفاضلية جزئية مكافئية (معادلات سريان الحرارة وعمليات الانتشار)

$B^2 - 4AC > 0$ تدعى معادلة تفاضلية جزئية زائدية (حركات الاهتزاز وحركات الموجة)

1-المعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء:

هناك عِدَّة أنواعٍ من المعادلات التفاضليةِ الجزئيةِ في الفيزياءِ. يحتوي العديد من المسائل الفيزيائية على متغيرين مستقلين أو أكثر مثل x , t. مثلا لدينا معادلة الموجة في بعد واحد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (5.2)$$

حيث c سرعة الموجة ،

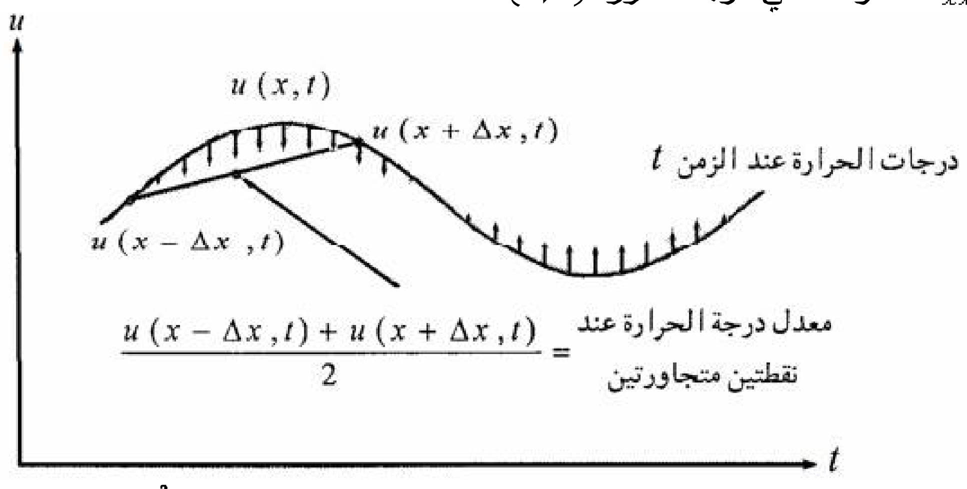
لدينا العديد من المعادلات التي يكون لديها تفاضل جزئي مثل معادلة انتشار الحرارة :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.3}$$

التي تصف انتشار الحرارة عبر ناقل ، وتكون k في هذه الحالة هي الناقلية الحرارية .

u_t معدل تغير الحرارة بالنسبة للزمن مقاسة بالواحدة $°C/sec$

u_{xx} تقعر منحني درجة الحرارة $u(x,t)$



الشكل (1-5) تبين الأسهم تغير درجات الحرارة بحسب المعادلة $\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

يمكن تفسير u_{xx} كما يلي:

1-إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ أقل من معدل درجة الحرارة عند النقطتين المجاورتين فإن $u_{xx} > 0$ وتكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x موجبة .

2- إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ تساوي معدل درجة الحرارة عند النقطتين المجاورتين فإن $u_{xx} = 0$ وتكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x مساوية للصفر.

3- إذا كانت درجة الحرارة $u(x,t)$ أكبر من معدل درجة الحرارة عند النقطتين

المجاورتين فإن $u_{xx} < 0$ وتكون محصلة سريان الحرارة عند النقطة x سالبة.
إذا قمنا بعزل جسم عن محيطه فسيصل إلى حالة توزع ثابت للحرارة حيث يكون المشتق الزمني لتابع الحالة مساوياً للصفر، تدعى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس وتكتب في بعد واحد بالشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (5.4)$$

يكون الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية الجزئية (5.1) تابع لكل من x و y ، يحقق هذا التابع المعادلة التفاضلية الجزئية ضمن منطقة مستوية s محصورة بمنحن مستو مغلق C بحيث يحقق شروطاً حدية معينة على كل نقطة من نقاط المنحني C. لإيجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام الحاسب، نلجأ إلى برمجة طرق التحليل العددي المستخدمة في حل هذه المعادلات، ومن الطرق التي تتبع عادة لحل هذه المعادلات هي طريقة الفروق المحدودة.

معادلة بواسون

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \qquad (5.5)$$

$\varphi(r)$ الكمون الكهربائي المستقر في الموضع r حيث كثافة الشحنة $\rho(r)$ وهي معادلة ناقصية.

معادلة الإنتشار

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla n(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r},t) \qquad (5.6)$$

$n(r,t)$ التركيز في الموضع r والزمن t مع المصدر المُعطى$S(r,t)$ وهي معادلة قطعيّة مكافئة. هنا $D(r)$ معامل الإنتشار في الموضع r. معادلة الموجةً

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2 u(\mathbf{r},t) = R(\mathbf{r},t) \qquad (5.7)$$

$u(r,t)$ الإزاحةِ المُعَمَّمةِ في الموضع r والزمن t مع المصدر المُعطى$R(r,t)$ وهي معادلة زائدية .

معادلة شرودنغر المتعلقة بالزمن

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\mathcal{H}\Psi(\mathbf{r},t) \qquad (5.8)$$

وهي معادلة لجملة موصوفة بالهاملتوني $\mathcal{H}$، يُمْكِنُ أَنْ يُنْظَرَ لمعادلة شرودنغر بوصفها معادلة انتشار مع زمن تخيلي. تعد كُلّ المعادلات المذكورة أعلاه معادلات خطيّة إذا لَمْ تتعلّقْ المصادر والكميات الأخرى في المعادلات بالحلولِ. هناك معادلات لاخطّية أيضاً في الفيزياء التي تَعتمدُ بشدّة على الحلولِ العدديةِ. على سبيل المثال، معادلات تحريك السائل،

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\nabla P-\eta\nabla^2\mathbf{v}=0, \qquad (5.9)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=0,$$

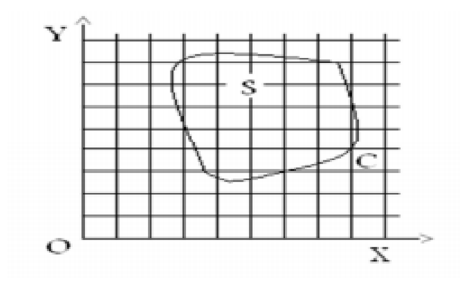
$$f(P,\rho)=0,$$

تتطلّبْ هذه المعادلات حلولاً عدديةَ في معظم الحالات. هنا المعادلة الأولى هي معادلة نايفر–ستوكس حيث $\boldsymbol{v}$ السرعةُ، ρ الكثافة، P الضغط، وη اللزوجة الحركيّة للسائلِ. يُمْكِنُ أَنْ تشتق معادلةَ نايفر–ستوكس مِنْ معادلةِ نيوتن لـ aعنصر صغير في السائلِ. المعادلة الثانية هي معادلةُ الإستمراريةَ، وهي نتيجةُ انحفاظ الكتلة. المعادلة الثالثة معادلةُ الحالةِ، التي يُمْكِنُ أَنْ تَتضمّنَ درجةَ حرارة أيضاً بوصفها متغيّراً إضافياً في العديد مِنْ الحالاتِ.

2-الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية:

2-1- طريقة الفروق المحدودة (الشبكة):

نقوم بتقسيم منطقة التكامل S والمحصورة بالمنحني



الشكل (2-5) يبين منطقة التكامل S

المغلق C بمجموعة من المستقيمات المتعامدة المتساوية البعد عن بعضها وتكون موازية للمحور العمودي، ومجموعة أخرى من المستقيمات الأفقية المتساوية البعد عن بعضها والتي توازي المحور الأفقي، تكون حلول المعادلات التفاضلية واقعة على نقاط تقاطع الشبكة المشكلة من المستقيمات المتعامدة. والفكرة الأساسية في حل المعادلات بهذه الطريقة هي استبدال المشتقات بعلاقات الفروق المحددة .

نعتبر كل نقطتين متجاورتين إذا كان البعد بينهما في الاتجاه OX أو OY يساوي بعد الشبكة. تنقسم نقاط الشبكة إلى نقاط ندعوها نقاطاً داخلية وهي التي تقع داخل المنحني C، ونقاطاً حدية وهي التي تقع على المنحني C .

يأخذ التابع $u=u(x,y)$ على نقط الشبكة قيماً نعبر عنها بالعلاقة:

$$u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl) \tag{5.10}$$

حيث $i = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots, k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots,$ رقم النقطة على المحور، h,l بعد الشبكة على كل محور. نقوم باستبدال المشتق الجزئي عند كل نقطة داخلية $(x_0 + ih, y_0 + kl)$ بعلاقات الفروق :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h} \tag{5.11}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}$$

والخطأ في هاتين المعادلتين من رتبة l و h

من أجل النقاط الحدية نقوم باستخدام صيغ أقل دقة من الشكل:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h} \tag{5.12}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}$$

والخطأ في هاتين المعادلتين من رتبة l و h

المشتقات من المرتبة الثانية تستبدل بشكل مشابه:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} \quad (5.13)$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2}$$

والخطأ في هاتين المعادلتين من رتبة l^2 و h^2

تجعلنا هذه الاستبدالات قادرين على اختزال حل المعادلات مع المشتقات إلى جملة من معادلات الفروق التي تحل جبرياً أو عددياً.

2-2- حل معادلة بواسون:

لنفرض أن لدينا معادلة بواسون التالية:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (5.14)$$

ولنصغ مسألتنا بالشكل التالي: أوجد التابع الذي يحقق داخل مجال معين G المعادلة **(5.9)** ويحقق الشرط $u|_\Gamma = \varphi(x, y)$ على الحد Γ حيث $\varphi(x, y)$ هو التابع الذي يحقق الشرط المعطى. وبتركيب شبكة بحيث تحقق العلاقتين $x_i = x_0 + ih, y_k = y_0 + kl$

وباستبدال النقط الداخلية على الشبكة للمشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ بمعادلات الفروق (5.13) نجد:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \quad (5.15)$$

حيث $f_{ik} = f_k(x_i, y_k)$،

تشكل المعادلة (5.15) مع قيم التابع $f_k(x_i, y_k)$ عند النقاط الحدية (x_i, y_k).

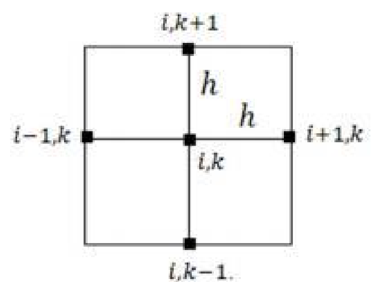
يكون لهذه الطريقة أبسط شكل عندما $h = l$ ويمكننا كتابة المعادلة (5.15) بالشكل:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{i,k} = h^2 f_{ik} \qquad (5.16)$$

نلاحظ أنه عندما $f_k(x_i, y_k) = 0$ تأخذ المعادلة (5.14)شكل معادلة لابلاس وتصبح معادلات الفروق بالشكل:

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) \qquad (5.17)$$

لقد قمنا بوضع معادلات الفروق مستخدمين مخطط الشبكة الموصوف بالشكل التالي:



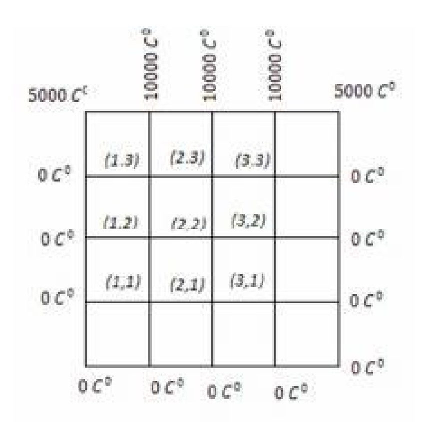
الشكل (5−3) يبين طريقة ترقيم الشبكة

الخطأ المرتكب باستخدام هذه الطريقة نعبر عنه بالمعادلة التالية:

$$|R_{ik}| \le \frac{h^2}{6} \max\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right\} \qquad (5.18)$$

مثال (1): لنفرض أن لدينا لوحاً معدنياً رقيقاً ذو شكل مربع بعده يساوي $1cm$. عزل هذا اللوح حرارياً (لايوجد تبادل حرارة مع المنطقة المحيطة) إذا علمت أن الشروط الحدية

$u_{11} = u_{31}, u_{12} = u_{32}, u_{13} = u_{33}$. ودرجات الحرارة على محيطه هي كما بالشكل :



الشكل (4–5) يبين الشروط الحدية ودرجات الحرارة

والمطلوب: أوجد توزع الحرارة داخل هذا اللوح مستخدماً $h = \frac{1}{4}$.

الحل:

توصف معادلة انتشار الحرارة بمعادلة لابلاس(شكل معادلة تفاضلية من النمط الناقصي) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

نجد باستخدام شبكة أبعادها تساوي 0.25 أن عدد النقاط الداخلية يساوي تسعة نقاط. نكتب معادلات الفروق لهذه النقاط آخذين بعين الاعتبار شروط التناظر وهو ما سيخفض عدد المعادلات إلى ستة معادلات:

$$\begin{aligned}
u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12} - 4u_{11} &= 0 \\
u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12} &= 0 \\
u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{14} - 4u_{13} &= 0 \\
u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21} &= 0 \\
u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} &= 0 \\
u_{13} + u_{33} + u_{22} + u_{24} - 4u_{23} &= 0
\end{aligned} \quad (5.19)$$

تتضمن هذه المعادلات القيم الاثنتي عشرة للتابع عند النقاط الحدية حيث :

$$u_{i0} = 0 \ (i=1,2,3), \ u_{0j} = 0 \ (j=1,2,3) \quad (5.20)$$
$$u_{14} + u_{24} + u_{32} = 10000$$

لاحظ أننا لسنا بحاجة لاستخدام سوى هذه النقاط من الشروط الحدية.

نستبدل الشروط الحدية $u_{11}=u_{31}, u_{12}=u_{32}, u_{13}=u_{33}$ و **(5.15)** بالمعادلات (5.19) فنجد:

$$u_{21}+u_{12}-4u_{11}=0 \tag{5.21}$$
$$u_{22}+u_{11}+u_{13}-4u_{12}=0$$
$$u_{23}+u_{12}+u_{14}-4u_{13}=-10000$$
$$2u_{11}+u_{22}-4u_{21}=0$$
$$2u_{12}+u_{21}+u_{23}-4u_{22}=0$$
$$2u_{13}+u_{22}-4u_{23}=-10000$$

بحل جملة المعادلات هذه باستخدام طريقة غاوص مثلاً نحصل على:

$$,u_{21}=982, u_{11}=714, u_{12}=1875,$$
$$u_{13}=4286, u_{22}=2500, u_{23}=5268$$

3-2- طريقة كرانك -نيكلسون:

تعطى معادلة انتشار الحرارة لجسم معزول، كما رأينا في الفقرة السابقة، على شكل معادلة تفاضلية من النمط الناقصي، أما المعادلة:

$$\varphi_t(x,t)=C^2\varphi_{xx}(\mathrm{x},t) \tag{5.22}$$

من أجل $0<x<a, 0<t<b$

فهي من النمط المكافئ وهي تحقق هذه الشروط الابتدائية

$$\varphi(x,0)=f(x) \text{ من أجل } t=0, 0\le x\le a$$

والشروط الحدية

$$\varphi(0,t)=g_1(t)=c_1 \text{ من أجل } x=0, 0\le t\le b$$
$$\varphi(a,t)=g_2(t)=c_2 \text{ من أجل } x=a, 0\le t\le b$$

توضح المعادلة (5.21) انتشار الحرارة في قضيب معزول وفي نهايتيه درجة حرارة ثابتة c_1 و c_2 والحرارة الابتدائية المتوزعة على طول القضيب هي $f(x)$ تستعمل طريقة كرانك – نيكلسون من أجل إيجاد حلول المعادلة (5.21) عند

النقطة $(x, t + \frac{k}{2})$ والتي تقع بين خطوط الشبكة. وتستعمل بالتحديد من أجل $\varphi_t\left(x, t + \frac{k}{2}\right)$ التي يتم الحصول عليها من صيغة الفروق المركزية:

$$\varphi_t\left(x, t + \frac{k}{2}\right) = \frac{\varphi(x,t+k) - \varphi(x,t)}{k} + o(k^2) \qquad (5.22)$$

التقريب المستخدم من أجل $\varphi_{xx}\left(x, t + \frac{k}{2}\right)$ هو متوسط التقريب $\varphi_{xx}(x, t)$ و $\varphi_{xx}(x, t + k)$ والذي له دقة من مرتبة $o(k^2)$:

$$\varphi_{xx}\left(x, t + \frac{k}{2}\right) = \frac{c^2}{2h^2}[\varphi(x - h, t + k) - 2\,\varphi(x, t + k) + \varphi(x - h, t) - 2\varphi(x, t) + \varphi(x + h, t)] + o(k^2) \qquad (5.23)$$

نقوم باستبدال العلاقتين (5.22) و (5.23) في العلاقة (5.21) وبإهمال الحدود التي تعبر عن رتبة الخطأ، ومن ثم نستخدم الدليل $\varphi(x_i, t_j) = \varphi_{i,j}$ فينتج لدينا معادلات الفروق:

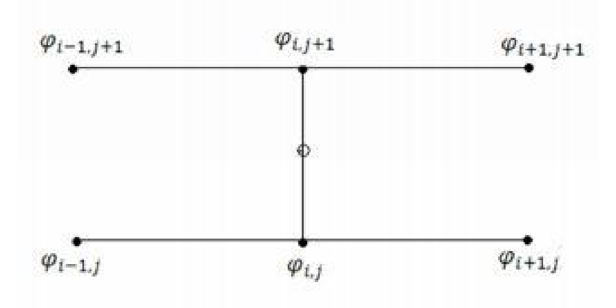
$$\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{k} = c^2\,\frac{\varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{2h^2} \qquad (5.24)$$

نقوم باستبدال $r = \frac{c^2 k}{h^2}$ في المعادلة (5.19) ويجب علينا إيجاد قيم $\varphi_{i-1,j+1}$ ، $\varphi_{i,j+1}, \varphi_{i+1,j+1}$. يمكننا فعل هذا بوضع هذه الحدود في الطرف الأيسر للمعادلة (5.24).

وبإجراء الترتيب المناسب للحدود في المعادلة (5.24) نجد:

$$-r\varphi_{i-1,j+1} + (2 + 2r)\varphi_{i,j+1} - r\varphi_{i+1,j+1} = (2 - 2r)\varphi_{i,j} + r(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}) \qquad (5.25)$$

حيث $i = 2,3,4, \dots, n - 1$.



الشكل (5-5) يبين طريقة ترقيم الشبكة بطريقة كرانك نيكلسون

الحدود على الطرف الأيمن من المعادلة (5.25) معروفة مسبقاً. تشكل المعادلات (5.25) جملة خطية من المعادلات القطرية $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ التي يمكن حلها بالتعويض أو أي طريقة أخرى.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 & 0 \\ -1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{2,j+1} \\ \varphi_{3,j+1} \\ \vdots \\ \varphi_{n-2,j+1} \\ \varphi_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \varphi_{3,j} \\ \varphi_{2,j} + \varphi_{4,j} \\ \vdots \\ \varphi_{n-3,j} + \varphi_{n-1,j} \\ \varphi_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix}$$

مثال (2): ليكن لدينا معادلة الحرارة $\varphi_t(x,t) = C^2\varphi_{xx}(\mathrm{x},t)$ حيث $C^2 = 1$ وليكن لدينا قضيب طوله متر واحد وقد حافظنا على درجة حرارة طرفي القضيب مساوية للصفر بوضعها في جليد ، بفرض أن توزع الحرارة في البداية :

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$$

قم بتطبيق طريقة كرانك – نيكلسون r=1 وأوجد توزع الحرارة من أجل t=0.01,0.02,0.03,…,0.10. قارن مع الحل الدقيق:

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\, e^{-t\pi^2} + \sin(3\pi x)e^{-9t\pi^2}$$

حيث الخطوة k=0.01, h=0.1, c=1, مما يجعل

r = (c^2 k)/h^2 = (1 (0.01))/(0.1)^2 = 1.

الحل:

```
C
C     TO APPROXIMATE THE SOLUTION TO THE PARABOLIC PARTIAL-DIFFERENTIAL
C     EQUATION SUBJECT TO THE BOUNDARY CONDITIONS
C               U(0,T) = U(L,T) = 0, 0 < t < T = MAX t
C     AND THE INITIAL CONDITIONS
C               U(X,0) = F(X), 0 <= X <= L:
C
C     INPUT:    ENDPOINT L; MAXIMUM TIME T; CONSTANT ALPHA; INTEGERS
C               M,N:
C
C     OUTPUT:   APPROXIMATIONS W(I,J) TO U(X(I),T(J)) FOR EACH
C               I=1,...,M-1 AND J=1,...,N.
C
C     INITIALIZATION
C     DIMENSION V(M),XL(M-1),XU(M-1),Z(M-1)
      DIMENSION V( 10),XL( 9),XU( 9),Z( 9)
C     V IS USED FOR W, FT FOR CAPITAL T, FX FOR L
      CHARACTER NAME1*30,AA*1
      INTEGER OUP,FLAG
```

```
      LOGICAL OK
      F(XZ)=SIN(PI*XZ)
      PI=4*ATAN(1.0)
      OPEN(UNIT=5,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      OPEN(UNIT=6,FILE='CON',ACCESS='SEQUENTIAL')
      WRITE(6,*) 'This is the Crank-Nicolson Method'
      WRITE(6,*) 'for the Heat Equation.'
      WRITE(6,*) 'Has the function F been created in the program? '
      WRITE(6,*) 'Enter Y or N '
      WRITE(6,*) ' '
      READ(5,*)  AA
      IF(( AA .EQ. 'Y' ) .OR. ( AA .EQ. 'y' )) THEN
         OK = .FALSE.
         WRITE(6,*) 'The lefthand endpoint on the X-axis is 0.'
19       IF (OK) GOTO 11
            WRITE(6,*) 'Input righthand endpoint on the X-axis.'
            WRITE(6,*) ' '
            READ(5,*) FX
            IF (FX.lE.0.0) THEN
               WRITE(6,*) 'Must be a positive number.'
            ELSE
               OK = .TRUE.
            ENDIF
         GOTO 19
11       OK = .FALSE.


12       IF (OK) GOTO 13
            WRITE(6,*) 'Input the maximum value of the time'
            WRITE(6,*) 'variable T.'
            WRITE(6,*) ' '
            READ(5,*) FT
            IF ( FT .LE. 0.0 ) THEN
              WRITE(6,*) 'Must be positive number.'
            ELSE
              OK = .TRUE.
            ENDIF
         GOTO 12
13       WRITE(6,*) 'Input the constant alpha.'
         WRITE(6,*) ' '
         READ(5,*) ALPHA
15       OK = .FALSE.
14       IF (OK) GOTO 16
            WRITE(6,*) 'Input integer m = number of intervals'
            WRITE(6,*) 'on X-axis and N = number of time intervals.'
            WRITE(6,*) 'Note: m must be 3 or larger.'
            WRITE(6,*) 'Separate by blank. '
            READ(5,*) M,N
            IF ((M.LE.2).OR.(N.LE.0)) THEN
              WRITE(6,*) 'Numbers not within correct range.'
            ELSE
              OK = .TRUE.
            ENDIF
```

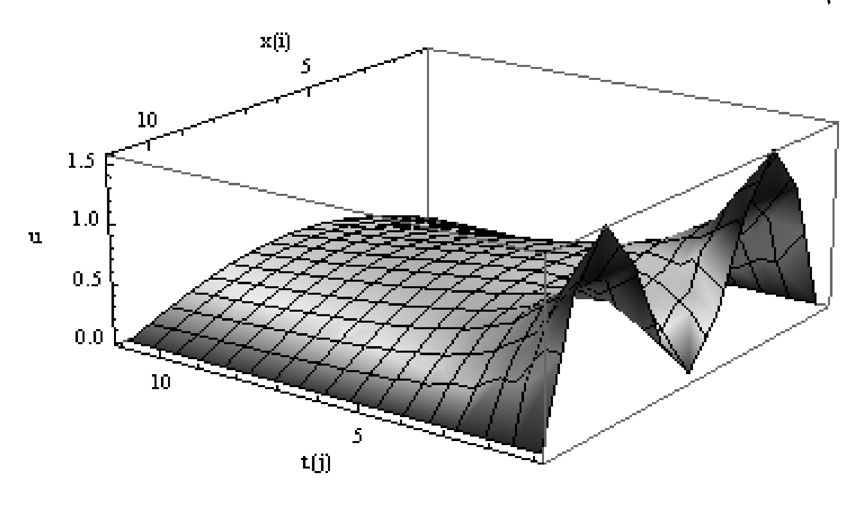
```
            GOTO 14
 16         CONTINUE
         ELSE
            WRITE(6,*) 'The program will end so that the function F '
            WRITE(6,*) 'can be created '
            OK = .FALSE.
         ENDIF
         IF(.NOT.OK) GOTO 400
         WRITE(6,*) 'Select output destination: '
         WRITE(6,*) '1. Screen '
         WRITE(6,*) '2. Text file '
         WRITE(6,*) 'Enter 1 or 2 '
         WRITE(6,*) ' '
         READ(5,*) FLAG
         IF ( FLAG .EQ. 2 ) THEN
            WRITE(6,*) 'Input the file name in the form - '
            WRITE(6,*) 'drive:name.ext'
            WRITE(6,*) 'with the name contained within quotes'
            WRITE(6,*) 'as example:   ''A:OUTPUT.DTA'' '
            WRITE(6,*) ' '
            READ(5,*) NAME1
            OUP = 3
            OPEN(UNIT=OUP,FILE=NAME1,STATUS='NEW')
         ELSE
            OUP = 6
         ENDIF
         WRITE(OUP,*) 'CRANK-NICOLSON METHOD FOR HEAT EQUATION'
         MM=M-1
         MMM=MM-1
         NN=N-1
C        STEP 1
         H=FX/M
C        TK IS USED FOR K
         TK=FT/N
C        VV IS USED FOR LAMBDA
         VV=ALPHA*ALPHA*TK/(H*H)
C        SET V(M)=0
         V(M)=0

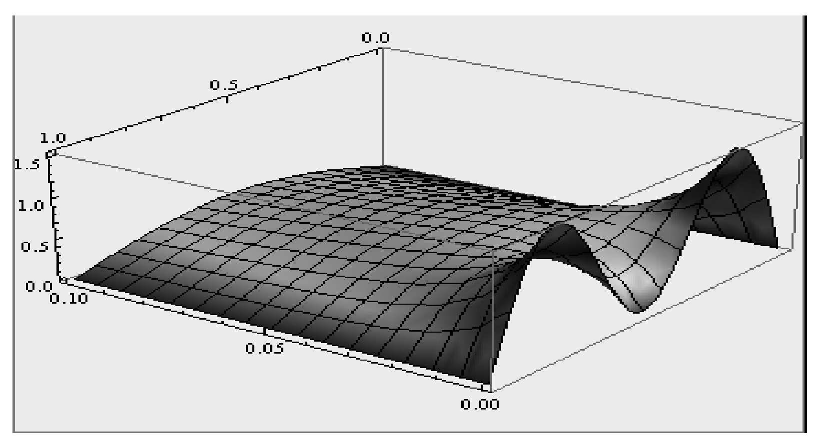

C        STEP2
C        INITIAL VALUES
         DO 10 I=1,MM
 10           V(I)=F(I*H)
C        STEP 3
C        STEPS 3 THROUGH 11 SOLVE A TRIDIAGONAL LINEAR SYSTEM
C        USING ALGORITHM 6.7
C        USE XL FOR L, XU FOR U
         XL(1)=1+VV
         XU(1)=-VV/(2*XL(1))
C        STEP 4
         DO 20 I=2,MMM
              XL(I)=1+VV+VV*XU(I-1)/2
 20      XU(I)=-VV/(2*XL(I))
```

```
C       STEP 5
        XL(MM)=1+VV+VV*XU(MMM)/2
C       STEP 6
        DO 30 J=1,N
C           STEP 7
C           CURRENT T(J)
            T=J*TK
            Z(1)=((1-VV)*V(1)+VV*V(2)/2)/XL(1)
C           STEP 8
            DO 40 I=2,MM
40          Z(I)=((1-VV)*V(I)+VV/2*(V(I+1)+V(I-1)+Z(I-1)))/XL(I)
C           STEP 9
            V(MM)=Z(MM)
C           STEP 10
            DO 50 II=1,MMM
                I=MMM-II+1
50          V(I)=Z(I) -XU(I)*V(I+1)
30      CONTINUE
C       STEP 11--OUTPUT WILL BE ONLY FOR T=FT
        WRITE(OUP,1) FT
        WRITE(OUP,3)
        DO 60 I=1,MM
            X=I*H
60      WRITE(OUP,2) I,X,V(I)
C       STEP 12
C       PROCEDURE IS COMPLETE
400     CLOSE(UNIT=5)
        CLOSE(UNIT=OUP)
        IF(OUP.NE.OUP) CLOSE(UNIT=6)
        STOP
1       FORMAT(1X,'OUTPUT FOR TIME = ' ,1X,E15.8)
2       FORMAT(1X,I3,2(1X,E15.8))
3       FORMAT(3X,'I',12X,'T(I)',12X,'V(I)')
        END

        FUNCTION F(X)
        F=SIN(3.14159265*X)+SIN(3*3.14159265*X)
        RETURN
        END FUNCTION
```

وبرسم الحلول:





$u[x,t] = e^{-\pi^2 t} \text{Sin}[\pi x] + e^{-9\pi^2 t} \text{Sin}[3\pi x]$

الحل الدقيق

الشكل (6–5) يبين شكل الحل

مثال (3): لنفترض من أن لدينا قضيباً معدنياً $x = 1\ m$ طوله متر واحد، غمس طرفاه في وعائيين يحويان جليداً منصهراً، قمنا بتسخين القضيب في منتصفه والمطلوب أوجد قيم الحرارة في عشر نقاط على طول القضيب علماً أنه يخضع للشروط التالية:

شروط التناظر في لحظة البدء $u = 2x$ من أجل $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $u = 2(1-x)$ من أجل $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

الحل:

تعطى معادلة انتشار الحرارة بالعلاقة $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، ومن أجل $x = 0, x = 1$ يكون $u = 0$ مهما تكن قيمة t . باستخدام طريقة كرانك نيكلسون نكتب معادلة انتشار الحرارة بالعلاقة:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right]$$

ونأخذ $h = \frac{1}{10}$ و $k = \frac{1}{100}$ فتصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$100(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{10^2}{2}\left[u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

وبالإصلاح:

$$u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + 4u_{i,j+1} = 0$$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = -u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1}$$

نبدل في النقاط المحددة على القضيب من أجل $j = 1$:

$$i = 1 \Rightarrow \qquad u_0 + u_2 = -u_2 - u_0 + 4u_1$$

$$0 + 0.4 = -u_2 + 4u_1$$

$$i = 2 \Rightarrow \qquad 0.2 + 0.6 = -u_3 - u_1 + 4u_2$$

$$i = 3 \Rightarrow \qquad 0.4 + 0.8 = -u_4 - u_2 + 4u_3$$

$$i = 4 \Rightarrow \qquad 0.6 + 1.0 = -u_6 - u_4 + 4u_5$$

$$i = 5 \Rightarrow \qquad 0.8 + 0.8 = -u_6 - u_4 + 4u_5$$

وهكذا ينتج لدينا خمس معادلات بخمسة مجاهيل بحلها نحصل على :

$$u_1 = 0.1989, u_2 = 0.3956, u_3 = 0.583, u_4 = 0.7381, u_5 = 0.7691$$

و من ثم أجل $j = 2$:

$$i=1 \Rightarrow \qquad 0+0.3956=0.3956=-u_2+4u_1$$

$$i=2 \Rightarrow \qquad 0.1989+0.5834=0.7823=-u_3-u_1+4u_2$$

$$i=3 \Rightarrow \qquad 0.3956+0.7381=1.1337=-u_4-u_2+4u_3$$

$$i=4 \Rightarrow \qquad 0.5834+0.7691=1.3525=-u_6-u_4+4u_5$$

$$i=5 \Rightarrow \qquad 2\times 0.7381=1.4762=-2u_4+4u_5$$

وهكذا ينتج لدينا خمس معادلات بخمسة مجاهيل بحلها نحصل على:

$$u_1=0.1936, u_2=0.3789, u_3=0.5400, u_4=0.6461, u_5=0.6912$$

وهكذا نتابع الحل حتى قيمة ملائمة للزمن.

مثال (4): معادلة الجهد:

سنختار معادلة الجهد المعطاة بالعبارة الرياضية

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<1,\ 0<y<1 \tag{5.26}$$

$$\varphi(0,y)=0, \quad \varphi(1,y)=0, \quad 0<y<1$$

$$\varphi(x,0)=\varphi(x,1)=f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<\frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}$$

لحل هذه المعادلة نختار شبكة مستطيلة في المنطقة التي يتم دراستها وذلك باستبدال المشتقات بمعادلات الفروق، وتصبح معادلة الجهد بالشكل:

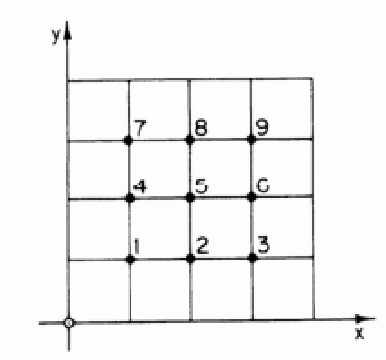
$$\frac{\varphi(x+\Delta x, y)-2\varphi(x,y)+\varphi(x-\Delta x, y)}{(\Delta x)^2}+ \frac{\varphi(x, y+\Delta y)-2\varphi(x,y)+\varphi(x, y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}=0 \tag{5.27}$$

نختار $\Delta x=\Delta y$ ونضرب المعادلة البديلة بـ $(\Delta x)^2$ لنحصل على:

$$\varphi(x+\Delta x, y)+\varphi(x-\Delta x, y)+\varphi(x, y+\Delta y)+\varphi(x, y-\Delta y)-4\varphi(x, y)=0$$

وعلينا الانتباه إلى أن قيمة $\varphi(x, y)$ مساوية لمتوسط القيم الأربعة المجاورة لها.

نأخذ قيمة أبعاد الشبكة $\Delta x=\Delta y=\frac{1}{4}$ ونرقم نقاطها كما بالشكل:



الشكل (5-7) ترقيم نقاط الشبكة

وينتج لدينا باستبدال القيم الحدية:

(5.28)

$$-4\varphi_1+\varphi_2+\varphi_4=-\frac{1}{2}$$

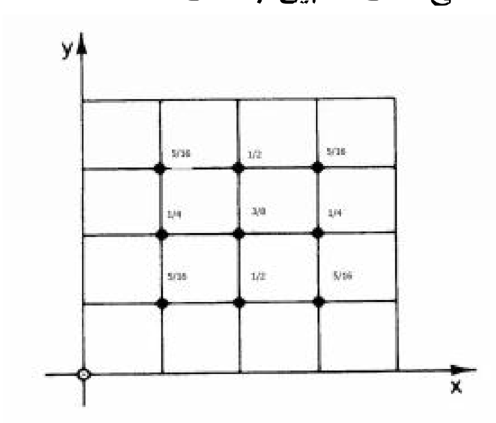
$$\varphi_1-4\varphi_2+\varphi_3+\varphi_5=-1$$

$$\varphi_2-4\varphi_3+\varphi_6=-\frac{1}{2}$$

$$\varphi_1-4\varphi_1+\varphi_5+\varphi_7=0$$

$$\varphi_2+\varphi_4-4\varphi_5+\varphi_6+\varphi_8=0$$

وبوضع التناظر في المسألة نجد أن $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4,\varphi_5$ فقط تحتاج للتعيين. وباستخدام طريقة الحذف نحصل على الحل المبين بالشكل:



الشكل (5-8) يبين قيم الحلول

لإيجاد حل أكثر دقة نختار $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{10}$ وهذا سيؤدي للحصول على 81 معادلة نستطيع خفضها باستخدام شروط التناظر إلى 25 معادلة.

مثال (5): المعادلة الموجية:

نختار معادلة اهتزاز وتر المعطاة بالعلاقة :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t \tag{5.29}$$

$$\varphi(0,t) = 0, \quad \varphi(1,t) = 0, \quad 0 < t$$

$$\varphi(x,0)\ \ f(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)\ \ g(x),\ 0 < x < 1,$$

لا تحتاج هذه المعادلة عادة إلى حل عددي حتى لو كانت غير متجانسة فطريقة دالمبير تعطي حلا لهذه المعادلة حتى في حالة المعادلات الموجية اللاخطية. ولكن في حالة البعدين لاتصلح طريقة دالمبير، ويكون الحل التحليلي غير مرض. لتطبيق الطريقة العددية نحول المعادلة الموجية إلى شكل معادلة الفروق وذلك باستبدال معادلات الفروق بالمعادلة الموجية:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\varphi(x+\Delta x, t) - 2\varphi(x,t) + \varphi(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\varphi(x, t+\Delta t) - 2\varphi(x,t) + \varphi(x, t-\Delta t)}{(\Lambda t)^2}$$

وتكون المعادلات البديلة:

$$\varphi_i(m+1) - 2\varphi_i(m) + \varphi_i(m-1) = \rho^2(\varphi_{i+1}(m) - 2\varphi_i(m) + \varphi_{i-1}(m)) \tag{5.30}$$

حيث $\rho = \frac{\Delta t}{\Lambda x}$ ، $x_i = i\Delta x, t_m = m\Delta t$

ويكون الحل بالنسبة لـ $\varphi_i(m+1)$ فنحصل على المعادلات:

$$\varphi_i(m+1) = \rho^2 \varphi_{i-1}(m) + 2(1-\rho^2)\varphi_i(m) + \rho^2 \varphi_{i+1}(m) - \varphi_i(m-1)$$

أي أن حل هذه المعادلة يتطلب منا معرفة الحل التقريبي عند مستويات أدنى *m,m-1* ، ويمكن توفيرها من تطبيق الشروط الحدية.

سنوضح الآن طريقة العمل مع المعادلة الموجية ببعدين، ولندرس تذبذب غشاء مربع، كما في المسألة التي توصف بالمعادلات:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\qquad 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<t \tag{5.31}$$

$$\varphi(x,0,t)=0,\quad \varphi(x,1,t)\ 0,\quad 0<x<1,\quad 0<t$$

$$\varphi(0,y,t)=0,\quad \varphi(1,y,t)=0,\quad 0<y<1,\quad 0<t$$

$$\varphi(x,y,0)=f(x),\quad 0<x<1,\quad 0<y<1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,y,0)=g(x),\quad 0<x<1,\quad 0<y<1,$$

وبالاستبدال بمعادلات الفروق نجد:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\longrightarrow\frac{\varphi(x+\Delta x,y,t)-2\varphi(x,y,t)+\varphi(x-\Delta x,y,t)}{(\Delta x)^2}$$

$$+\frac{\varphi(x,y+\Delta y,t)-2\varphi(x,y,t)+\varphi(x,y-\Delta y,t)}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\longrightarrow\frac{\varphi(x,y,t+\Delta t)-2\varphi(x,y,t)+\varphi(x,y,t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

وتكون المعادلات البديلة:

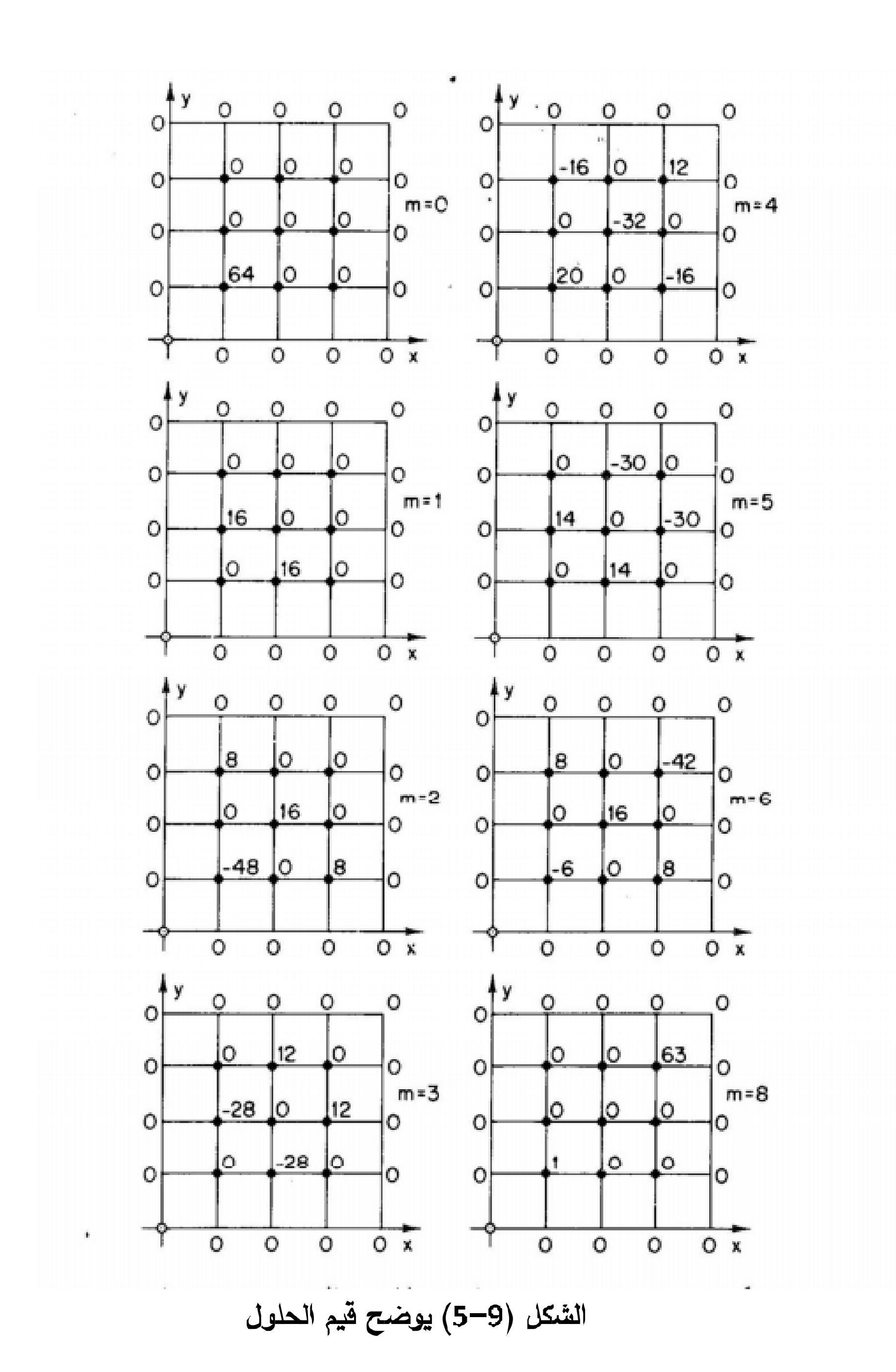
$$\frac{\varphi_i(m+1)-2\varphi_i(m)+\varphi_i(m-1)}{(\Delta t)^2}=\frac{\varphi_E(m)-2\varphi_i(m)+\varphi_W(m)}{(\Delta x)^2}+\frac{\varphi_N(m)-2\varphi_i(m)+\varphi_S(m)}{(\Delta y)^2} \tag{5.32}$$

حيث يدل: E يمين النقطة، W يسار النقطة ، S أعلى النقطة ، N أسفل النقطة

وباختيار $\Delta x=\Delta y=\frac{1}{n}$ ورمزنا بـ $\rho=\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{\Delta t}{\Delta y}$ فتبسط المعادلة إلى:

$$\varphi_i(m+1)=\rho^2[\varphi_E(m)-2\varphi_W(m)+\varphi_N(m)]+(2-4\rho^2)\varphi_i(m)-\varphi_i(m-1)$$

و نحصل على الحلول العددية لمعادلة الموجة باختيار $\Delta x=\Delta y=\frac{1}{4}$ ، $\rho^2=\frac{1}{2}$.



الشكل (9–5) يوضح قيم الحلول

تطبيق(1): نُريدُ دراسة حقلِ مغناطيسيٍ يرتبطَ بمغناطيس دائم معيّن له شكل حلقة دائرية، كما بالشكل، نستخدم الإحداثيات الاسطوانية بسبب الشكل الدائري للمغناطيس، حيث إن المغناطيسِ لَهُ مدى محدود على طول z محور،

فالمشكلة لَيستْ قابلة للفصل ولا يمكن إيجاد حَلَّ تحليليَ! الحَلّ المحتمل الوحيد هو إيجاد حل عددي.

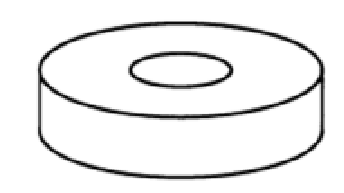
توصف الظواهر الكهرومغناطيسية، بما في ذلك الحقلِ المغناطيسيِ الناتج بهذا المغناطيس، توصف بمعادلاتِ ماكسويل:

$$\nabla.\mathbf{D} = \rho, \tag{5.33}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.34}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0, \tag{5.35}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \tag{5.36}$$



الشكل (5-10) شكل المغناطيس

ترتبط H بـ B بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}), \tag{5.37}$$

حيث M هي مغنطة المادة. ينتج الحقل المغناطيسي من عاملين الأول التيار والثاني تغير الحقل الكهربائي. سنفترض أن الحقل المغناطيسي متجانس ويوازي محور المغناطيس. نفرض أن المشتقات بالنسبة للزمن معدومة من أجل مسألة الحالة المستقرة، وحيث إنه لا يوجد شحنات كهربائية فإن $\rho = 0$ ، وبالتالي ليس هناك تيار أي أن $\mathbf{J} = 0$ ،

$$\nabla\times\mathbf{H} = 0, \tag{5.38}$$

وحيث إن *curl* معدوم فإننا نستطيع أن نكتب:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi, \tag{5.39}$$

حيث ϕهو الكمون المغناطيسي السلمي. من المعادلة (35) نجد أن الكمون يحقق:

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (5.40)$$

بما أننا نفترض أن المغناطيس متجانس فهذا يؤدي إلى أن التفرق معدوم ضمن المغناطيس وكذلك تكون المغنطة وتفرقها معدومة كذلك. كما يجب أن نأخذ عدم الاستمرارية على الحدود، ويحقق الكمون معادلة لابلاس على السطح.

الشروط الحدية:

نعرف من دراستنا في الفيزياء أنه يجب تحقيق الشرط التالي على الوصلة الواقعة بين مادتين:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (5.41)$$

حيث $\hat{n}$ شعاع الواحدة عند الوصلة ، وباستخدام الكمون السلمي نحصل على :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2) = 0. \quad (5.42)$$

وبالتكامل نجد أن:

$$\Phi_1 = \Phi_2. \quad (5.43)$$

ولدينا كذلك الشرط على الحقل B :

$$\mathbf{B}_2.\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{B}_1.\hat{\mathrm{n}} = 0, \quad (5.44)$$

والذي يعني أن B يكون مستمراً. وباستخدام حدود الكمون نجد:

$$(-\nabla\Phi_1 + \mathbf{M}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (-\nabla\Phi_2 + \mathbf{M}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (5.45)$$

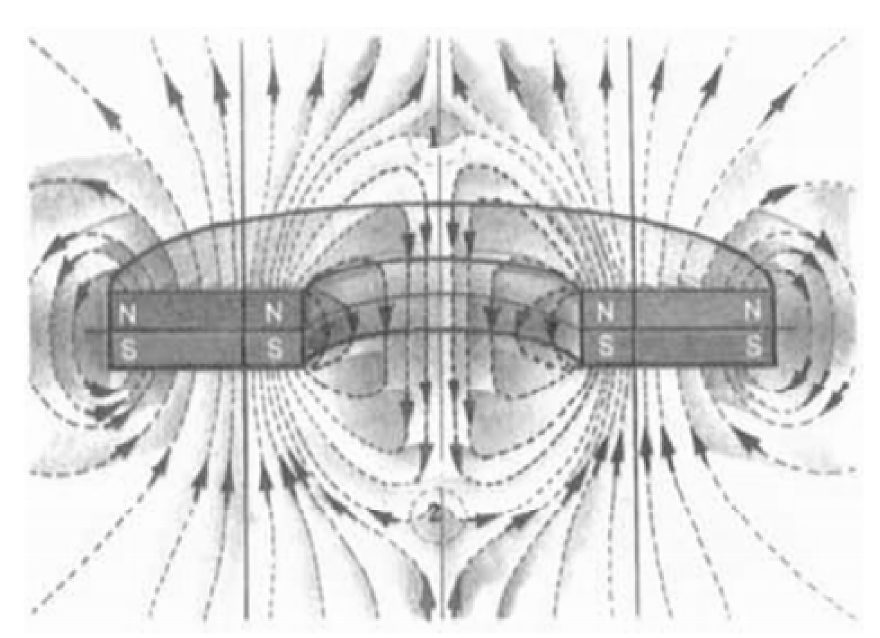
$$(\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

هذا هو الشرط الحدي على تدرج الكمون عند عبور الوصلة، يتغير التدرج حتى يحدث التوازن في تغير المغناطيسية.

هناك شرط آخر عند اللانهاية ، بما أن المغناطيس هو ثنائي قطب فإن الشكل الرمزي للكمون هو:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{V}{4\pi}\mathbf{M} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{VMz}{4\pi r^3}. \quad (5.46)$$

يمكن معالجة مثل هذا الشرط بالكثير من الطرق وأبسطها أخذ شبكة كبيرة الأبعاد، وفرض الكمون مساوياً للصفر عند حدودها.



الشكل (10–5) يبين خطوط الحقل المغناطيسي

معادلات الفروق المحدودة:

يعطى اللابلاسيان بالاحداثيات الاسطوانية بالعلاقة:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \qquad (5.47)$$

نلاحظ أن مسألتنا هنا متناظرة اسطوانياً ولا تتعلق بالزاوية ϕ وهذا تبسيط كبير.

نختار شبكة من ρ, z بحيث تكون متساوية الخطوة بالاتجاهين، ونضع مركز الإحداثيات في المركز الهندسي للمغناطيس وهكذا نحصل على:

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h\rho_i} + \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h^2}, \qquad (5.48)$$

حيث،

$$\Phi_{i,j} = \Phi(\rho_i, z_j), \quad 0 \le i \le N_\rho, \quad 0 \le j \le N_z.$$

بسبب تناظر الجسم نستطيع كتابة الكمون بالشكل التالي:

$$\Phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left[(1+\frac{h}{2\rho_i})\Phi_{i+1,j}+(1-\frac{h}{2\rho_i})\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i,j-1}\right],\quad i,j\neq 0. \tag{5.49}$$

يعطى اللابلاسيان على طول محور التناظر للمغناطيس بالعلاقة :

$$\nabla^2=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{5.50}$$

يبدو أن الحد الثاني يحمل إشكالات عندما ρ تساوي الصفر. ونحن يجب ألا نقبل بأي شذوذ في هذه المسألة أو أي مسألة فيزيائية أخرى. يمكن حل هذه المشكلة بافتراض Φ تابع مستمر للموضع ، من أجل z ثابت تكون كل القيم الفيزيائية متساوية في كل الاتجاهات كلما اقتربت ρ من الصفر. وبالتالي فإن قيمة Φ لاتتغير، ويكون مشتقها بالنسبة لـ ρ معدوم. ومن ثم يمكن استخدام قاعدة لوبيتال:

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=\left.\frac{\partial\Phi/\partial\rho}{\rho}\right|_{\rho=0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial\rho}(\partial\Phi/\partial\rho)}{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho)}=\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0}. \tag{5.51}$$

ويصبح التعبير الصحيح للابلاسيان بالشكل:

$$\nabla^2\Phi=2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\quad \rho=0. \tag{5.52}$$

وباستخدام صيغة اللابلاسيان السابقة تصبح معادلة الفروق الصحيحة:

$$\Phi_{0,j}=\frac{[4\Phi_{1,j}+\Phi_{0,j+1}+\Phi_{0,j-1}]}{6}. \tag{5.53}$$

يكون الحل أبسط عندما $z=0,$ ، حيث يصبح المغناطيس ثنائي قطب ، أي له نهايتان إحداها قطب جنوبي والأخرى قطب شمالي، أي أن الحل من أجل $z<0$ هو عكس الحل من أجل $z>0$، أي يجب أن يكون Φ تابعاً فردياً لـ z، ويجب أن يكون معدوماً من أجل $z=0$:

$$\Phi_{i,0}=0,\quad \forall i \tag{5.54}$$

ننتقلُ إلى شروطِ الحَدِّ الأقصى على سطح المغناطيس. ندرك فوراً أن معادلةِ لابلاس ليست صحيحة هنا. تكون المعادلة الفعّالة على السطح هي المعادلة (5.40)، التي تَتضمّنُ على السطح اعتبارات تغييرِ المغنطة. ليس هناك عناصرِ اعتيادية للحقل المغناطيسي على السطوحَ الإسطوانيةَ للمغناطيسِ في

الدائرة الداخلية والدائرة الخارجية. تبين المعادلة (5.45) أن المشتق مستمر إذا كان المشتق داخل السطح الداخلي يساوي المشتق خارج السطح. وبالتالي يكون المشتق الثاني يساوي الصفر. أي أن المطلوب هو:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}\right|_{i^{\bullet}} = 0,$$

أي

$$\Phi_{i^{\bullet},j} = \frac{\Phi_{i^{\bullet}+1,j} + \Phi_{i^{\bullet}-1,j}}{2}, \qquad (5.55)$$

حيث ث لاحقة تعبر عن نقط الشبكة داخل الاسطوانة.

ونعبر عن علاقة المشتق داخل المغناطيس بالعلاقة:

$$\frac{\Phi_{i,j^{\bullet}} - \Phi_{i,j^{\bullet}-1}}{h} - M = \frac{\Phi_{i,j^{\bullet}+1} - \Phi_{i,j^{\bullet}}}{h}, \qquad (5.56)$$

حيث *، عن لاحقة تعبر عن نقط الشبكة على سطح المغناطيس.

بالحل بالنسبة لـ Φ نجد:

$$\Phi_{i,j^{\bullet}} = \frac{Mh + \Phi_{i,j^{\bullet}+1} + \Phi_{i,j^{\bullet}-1}}{2}. \qquad (5.57)$$

وبقي هناك مشكلة واحدة هي تحديد Φ، وهي يمكن حلها باستخدام المعادلات (5.57) و (5.55) بأخذ المتوسط بينهما نجد:

$$\Phi_{i^{\bullet},j^{\bullet}} = \frac{Mh + \Phi_{i^{\bullet},j^{\bullet}+1} + \Phi_{i^{\bullet},j^{\bullet}-1} + \Phi_{i^{\bullet}+1,j^{\bullet}} + \Phi_{i^{\bullet}-1,j^{\bullet}}}{4}. \qquad (5.58)$$

تمارين:

1- لنفرض أن لدينا قضيباً معدنياً طوله متر $x = 1\ m$ واحد، ،
غمس طرفاه في وعائين يحويان ماءً يغلي، قمنا بتسخين القضيب في منتصفه والمطلوب أوجد قيم الحرارة في عشر نقاط على طول القضيب علماً أنه يخضع للشروط التالية: شروط التناظر في لحظة البدء $u = 2x$ من أجل $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $u = 2(1-x)$ من أجل $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

2- استخدم طريقة كرانك–نيكلسون لحل معادلة الحرارة

$$\varphi_t(x,t) = \varphi_{xx}(x,t)$$

من أجل $0 < x < 1, 0 < t < 0.1$

تحقق هذه المعادلة الشروط الابتدائية

$$\varphi(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \quad \text{من أجل} \quad t = 0, 0 \le x \le a$$

والشروط الحدية

$$\varphi(0,t) = g_1(t) = 0 \quad \text{من أجل} \quad x = 0, 0 \le t \le 0.1$$

$$\varphi(a,t) = g_2(t) = 0 \quad \text{من أجل} \quad x = 1, 0 \le t \le 0.1$$

توجيه: استخدم من أجل التبسيط قيمة الخطوة $\Delta x = h = 0.1$ و $\Delta t = k =$ 0.01 حيث النسبة $r = 1$. سيكون حجم المصفوفة (11×11)

الفصل السادس

تحويل فورييه "للقوانين الفيزيائية"

مقدمة:

تتصرف الطبيعة بشكل مختلف عما يتوقعه حدسنا في العديد من الحالات، عندما نلاحظ الحركة الدورية، نستطيع تحديد الدور الذي تتضمنه مباشرة، ولكن لا نستطيع تحديد بنية المعطيات التي يتضمنها كل دور.

نعلم أنه يمكن أن نمثل أي تابع مستمر على شكل مجموع لانهائي لسلسلة، وتلعب سلسلة تايلور دوراً مهماً في مثل هذه الحالة، إلا أنها تصبح غير صالحة عندما يصبح التابع دورياً، وذلك لعدم إمكانية أخذ نقطة وحيدة مميزة للنشر في جوارها، حيث إن التابع دوري، وهو ما يعني وجود نقطة مماثلة لأخرى بعد كل دور. وتعتبر الحركة الدورية صفة مشتركة على حد بعيد لعدة تواترات مختلفة في آن واحد، وتعد اهتزازات سلك الكمان مثالاً على الحركة الدورية، حيث يوجد تواتر أساسي f وكل توافقياته 2f,3f,4f,.... وقد استطاع برنوللي إيجاد حل لمسألة الوتر المهتز معبراً عنه بسلسلة لا منتهية من التوابع المثلثية، وبيَّن فورييه أنه يمكن تمثيل أي تابع على شكل متسلسلة:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n Cos\frac{n\pi x}{p}+b_n Sin\frac{n\pi x}{p}) \qquad (6.1)$$

حيث a_0 ثابت و P ثابت موجب ، و يكون لتابعي الجيب وجيب التمام الدور $\frac{2P}{n}$.

وكي يكون بالامكان تمثيل f كما المعادلة (6.1) يجب أن يكون f تابعاً دورياً له دور 2P أو أقل.

1- إيجاد الثوابت (معاملات فورييه):

a_0 **:** نفرض أن f تابع قابل للتكامل على المجال $[x_1,x_2]$ ومن ثم نكامل طرفي المعادلة (6.1) من p− إلى p+

$$\int_{-p}^{+p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{+p} dx + a_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-p}^{+p} Cos(\frac{n\pi x}{p})\,dx + b_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-p}^{+p} Sin(\frac{n\pi x}{p})\,dx$$

$$\int_{-p}^{+p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}[\,x]_{-p}^{+p} = a_0\, p \Rightarrow a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{+p} f(x)\,dx$$

a_n **:** نضرب طرفي العلاقة (6.1) بالحد $Cos(\frac{n\pi x}{p})$ ونكامل الطرفين على المجال $[-p, +p]$ فنجد: $a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{+p} f(x)\, Cos(\frac{n\pi x}{p})dx$

b_n**:** نضرب طرفي العلاقة (6.1) بالحد $Sin(\frac{n\pi x}{p})$ ونكامل الطرفين على المجال $[-p, +p]$ فنجد: $b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{+p} f(x)\, Sin(\frac{n\pi x}{p})\,dx$

تسمى العلاقة(6.1) بمتسلسلة فورييه، وتسمى المعادلات التي تعطي a_n, b_n معاملات فورييه، ويبرهن أنه، إذا كانت **f** دورية ومعرّفة من أجل جميع قيم x وقابلة للتكامل فإن التوابع $f(x)Cos(\frac{n\pi x}{p})$ و $f(x)Sin(\frac{n\pi x}{p})$ قابلة للتكامل، وبالتالي تكون المعاملات a_n, b_n ، موجودة أي أنه يوجد للتابع **f** متسلسلة فورييه وتوضع قيود على التابع **f** بحسب نظرية ديريخليه.

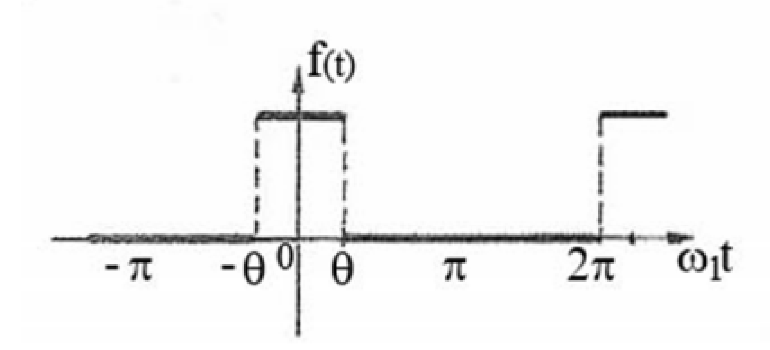
2- نظرية ديريخليه: يفترض أن التابع f تابع دوري دوره 2p ومعرّف في المجال $]-\infty, +\infty[$، وإذا كان للتابع f عدد محدد من نقط الانفصال، وعدد محدد من النهايات العظمى والصغرى في المجال $-p \le x \le +p$ فإنه لجميع قيم $x = x_0$ يكون :

$$\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{+p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n Cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n Sin(\frac{n\pi x}{p})) = \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}$$

ويبرهن أن متسلسلة فورييه لتابع زوجي تحوي فقط على حدود جيب التمام فقط، وأن التابع الفردي يحوي على حدود الجيب فقط.

مثال(1) : أوجد تحليل فورييه للتابع المبين بالشكل ، وذلك بافتراض أن:

$$f(t)=\begin{cases}1 & -0<t<0\\ 0 & -\pi<t<-0 \text{ and } 0<t<\pi\end{cases}$$



الحل:

نحسب قيمة الثوابت a_0، و a_n، و b_n، الواردة في العلاقة التالية

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega_1 t+a_2\cos\omega_2 t+.......+b_1\sin\omega_1 t+b_2\sin\omega_2 t+.......$$

فنجد:

بالنسبة للثابت a_0 :

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}dt=\frac{2\theta}{\pi}$$

أما قيمة الثابت a_n، فتساوي:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)\cos\omega_n t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\cos n\,t\,dt$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin n\,t}{n}]_{-\theta}^{\theta}=\frac{1}{\pi}(\frac{\sin n\theta-\sin(-n\theta)}{n})=\frac{2\sin n\theta}{n\pi}$$

أما بالنسبة إلى قيمة الثابت b_n، فهي تساوي:

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)\sin\omega_n t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\sin n\,t\,dt$$

$$b_n=\frac{-1}{\pi}[\frac{\cos n\,t}{n}]_{-\theta}^{\theta}=\frac{-1}{\pi}(\frac{\cos n\theta-\cos(-n\theta)}{n})=0$$

$b_n=0$ مهما كانت قيمة n ، لأن التابع $\cos n\theta$ دوماً زوجي.

بالتعويض في العلاقة(1-22)، نجد:

$$f(t)=\frac{\theta}{\pi}+\frac{2\sin\theta}{\pi}\cos t+\frac{2\sin 2\theta}{2\pi}\cos 2t+\frac{2\sin 3\theta}{3\pi}\cos 3t+\ ......$$

$$f(t)=\frac{\theta}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\frac{\sin\theta}{1}\cos t+\frac{\sin 2\theta}{2}\cos 2t+\frac{\sin 3\theta}{3}\cos 3t+\ ......)$$

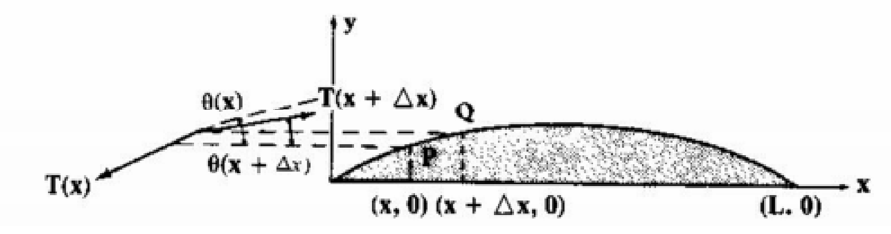
تطبيق (1): دراسة الوتر المهتز:

نفترض أن لدينا وتراً تام المرونة مثبت عند النقطتين (0،0) و (L،0) وتتسبب في ذبذبة الوتر إزاحة عمودية لكل نقطة من نقاط المستوي xy، وتكون هذه الإزاحة صغيرة وقد تكون صفراً، كذلك سرعة ابتدائية صغيرة وقد تكون صفراً وهي عمودية على المحور الأفقي.

بافتراض أن التوتر T في الوتر كبير للغاية، بحيث يمكن إهمال تأثير مقاومة الهواء والجاذبية. أن الوتر قابل للانحناء بما يكفي لكي يكون التوتر مماساً للوتر عند كل نقطة من نقاطه (أو انحناء الوتر صغير بالمقارنة مع طوله). كذلك نفرض أن نقط الوتر يتحرك شاقولياً في المستوي xy وأن أكبر إزاحة لأية نقطة من الوتر عن المحور الشاقولي تكون صغيرة بالمقارنة مع L وبفرض أن الوتر يتألف من مادة متجانسة و ρكتلة الوتر في واحدة الطول.

وهكذا تكون كتلة جزء الوتر الواقع بين x و $x+\Delta x$ مساوية لـ $\rho+\Delta\rho$ ، كذلك يعتمد الارتفاع y لأي نقطة من الوتر تبعد x عن المحور الرأسي على الزمن t والبعد x. والسؤال الآن ما هي المعادلة التفاضلية الجزئية التي يحققها الارتفاع y ؟ حيث $y=y+y(x,t)$ و $t>0, 0\le x\le L$.

نلاحظ من الشكل (1) أن جزء الوتر المحصور بين (x و $x+\Delta x$) يقع تحت تأثير التوتر $T=T(x)$ والذي يؤثر بزاوية $\theta=\theta(x)$ عند النقطة p، والتوتر الذي يؤثر بزاوية $\theta=\theta(x+\Delta x)$(زاوية ميل المماس للوتر) عند النقطة Q.



الشكل (1) الوتر المتذبذب في اللحظة t

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في الاتجاهين x و y نجد:

$$T(x+\Delta x)\sin[\theta(x+\Delta x)] - T(x)\sin[\theta(x)] = \rho(\Delta x)\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

$$T(x+\Delta x)\cos[\theta(x+\Delta x)] - T(x)\cos[\theta(x)] = 0 \quad (6.3)$$

$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2}$هو تسارع مركز الثقل للقسم من الوتر محل الدراسة وذلك باتجاه y .

والطرف الأيمن من المعادلة (3) يساوي الصفر، لافتراضنا عدم وجود حركة انسحابية وهكذا يمكننا أن نكتب :

$$T(x+\Delta x)\cos[\theta(x+\Delta x)] = T(x)\cos[\theta(x)] = T \quad (6.4)$$

حيث T قوة التوتر الأفقي للوتر ، من (2) و (3) نجد:

$$\frac{T(x+\Delta x)\sin[\theta(x+\Delta x)]}{T(x+\Delta x)\cos[\theta(x+\Delta x)]} - \frac{T(x)\sin[\theta(x)]}{T(x)\cos[\theta(x)]} = \frac{\rho(\Delta x)}{T}\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2}$$

$$\tan[\theta(x+\Delta x)] - \tan[\theta(x)] = \frac{\rho(\Delta x)}{T}\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \quad (6.5)$$

وبما أن $\tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial t}$ يمكننا أن نكتب (5) بالشكل:

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \quad (6.6)$$

وبفرض أنّ $\Delta x \to 0$ فإن $\bar{y}$ تؤول إلى y عند x ويؤول الطرف الأيسر من (6) عند x إلى $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ونحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

حيث $\frac{1}{C} = \sqrt{\frac{\rho}{T}}$ وتسمى المعادلة (7) بالمعادلة الموجية في بعد واحد.

حل المسألة:

الآن لإيجاد ارتفاع الوتر المتذبذب y بدلالة x ، t يجب علينا حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y_{xx} = \frac{1}{C^2} y_{tt} \,, \quad 0 \prec x \prec L \quad , t \succ 0$$

$$y(0,t) = 0 \,, \; t \geq 0 \qquad (6.8)$$

$$y(L,t) = 0 \,, \; t \geq 0$$

$$y(x,0) = f(x) \,, \; 0 \leq x \leq L$$

$$y_t(x,0) = g(x) \,, \; 0 \leq x \leq L$$

ويمثل التابع f الشكل الابتدائي للوتر وتصف g السرعة الابتدائية لأية نقطة من الوتر، وبغرض أن f ، g تابعان مستمران على $[0, L]$ ونلاحظ أن $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$ وذلك لأن الوتر مثبت عند طرفيه .

باستخدام طريقة فصل المتغيرات ، حيث نفترض أن

$$y(x,t) = \varphi(x) T(x) \qquad (6.9)$$

وتصبح معادلة اهتزاز الوتر بالشكل

$$\varphi'' \, T = \frac{1}{C^2} \varphi \, T'' \qquad (6.10)$$

نقسم الطرفين على $\varphi \, T$ فنجد:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{T''(t)}{C^2 T(t)} \qquad (6.11)$$

وكي تتحقق هذه المعادلة، يجب أن يكون كلا طرفيها ثابتاً. وليكن λ^2، والآن نفصل المعادلة إلى معادلتين تفاضليتين عاديتين ترتبطان بالوسيط λ .

$$T''(t) + \lambda^2 C^2 T = 0 \quad , \quad 0 \leq t \qquad (6.12)$$

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

وهكذا تصبح الشروط الحدية

$$\varphi(0) \; T(t) = 0, \; \varphi(a) \; T(t) = 0 \; , 0 \leq t$$

نبحث عن الحل باستخدام تحويل فورييه ونفترض أن

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{p} \tag{6.13}$$

$$T(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n cos\frac{n\pi x}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n sin\frac{n\pi x}{p} \tag{6.14}$$

من الشرط الابتدائي $\varphi(0) = 0$

وهذا يؤدي إلى $a_n = 0 \Leftarrow$ الدور $= \frac{2p}{n}$

ومن الشرط $\varphi(L) = 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{p} = 0$

ونفترض أن $b_n \neq 0$ وإلا فإن $\varphi(x)=0$, $y(x,t)=0$, وبالتالي كي تتحقق الشروط الحدية يجب أن تكون $\sin\frac{n\pi x}{p}=0$ وهذا يتطلب $\lambda=\frac{n\pi}{L}$ وحيث إن تابع الجيب فردي فإن الحلول غير التافهة هي:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{p} \tag{6.15}$$

حيث n عدد صحيح موجب

وبالشكل نفسه نجد أن المعادلة التفاضلية (14) لها الحل

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n sinC_n\lambda_n t + \sum_{n=1}^{\infty} E_n cosC_n\lambda_n t \tag{6.16}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} d_n sin\frac{n\pi C}{L}t + \sum_{n=1}^{\infty} E_n cos\frac{n\pi C}{L}t$$

وفي تكوين حاصل الضرب $\varphi(x)\ T(x)$ نأخذ كلاً من $b_n=1$ ومن دون الإخلال بالعمومية فإن d_n و E_n اختيارية ويصبح الحل :

$$y(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin\lambda_n x(d_n \sin C_n\lambda_n t + E_n \cos C_n\lambda_n t) \tag{6.17}$$

وباستخدام الشرط $0 \le x \le L$, $y_t(x,0) = g(x)$

تصبح (17) بالشكل:

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} C\lambda_n \sin\lambda_n x(d_n \cos\lambda_n t - E_n \sin\lambda_n t)$$

حيث $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$

تمثل المعادلة (17) الحل، وقد استطعنا الحصول عليه بفرضيات فيزيائية متعددة ويمثل هذا الحل حركة الوتر . وبفرض أن الوتر يترك من السكون فعندئذ سيكون $g(x)=0, \quad C_n=0$ وتصبح (17) بالشكل:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} E_n \sin\frac{n\pi x}{L} + d_n \cos\frac{n\pi Ct}{L}$$

فإذا كان كل من $E_2, E_3, ...$ مساوياً للصفر فإن

$$y(x,t)= E_1 \sin\frac{n\pi}{L}\cos\frac{\pi Ct}{L}$$

$$\varphi(x)= E_1 \sin\frac{n\pi}{L}$$

وفي هذا النمط يتذبذب الوتر بوصفه قوساً واحداً بتردد

$$F=\frac{\pi CL^{-1}}{2\pi}=\frac{C}{2L}$$

وتولد ذبذبة الوتر موجات صوتية مسموعة بوصفها نغمة موسيقية إذا كان الشد في الخيط T كبيراً للغاية $C=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ وتسمى النغمة المتوافقة مع $n=1$ بالنغمة الأساسية ويكون ترددها هو التردد الأصغر من بين أنماط التذبذب العادية وتسمى أيضاً بالإيقاع الأول

- إذا كانت $E_n=0$ ما عدا E_1 فإن

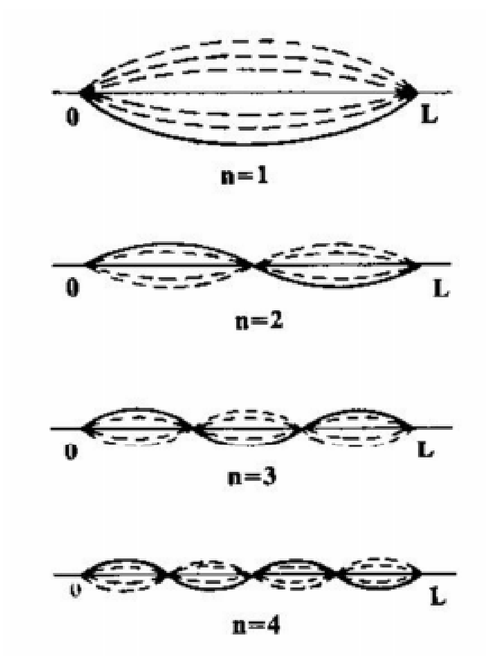
$$y(x,t)=E_2 \sin\frac{2\pi}{L}\cos\frac{2\pi Ct}{L}$$

$$\varphi(x)=E_2 \sin\frac{2\pi x}{L}$$

وفي هذا النمط تسمى النقطة $x=\frac{L}{2}$ بالعقدة، وتبقى ثابتة بينما يتذبذب الوتر كنصفي موجة بتردد $\frac{2C}{2L}=2[\frac{C}{2L}]$ ويولد ما يسمى بالنغمة التوافقية الأولى.

وهكذا إذا كان $y(x,t)=E_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi Ct}{L}$

تولّد الذبذبة الإيقاع النوني أو النغمة التوافقية (n-1)، ويكون تردد الإيقاعات العالية هي حاصل جداء تردد الذبذبة، وهو الخاصة الناتجة في الأصوات العالية التي هي حاصل جداء التردد الأساسي في عدد صحيح. وكما نعلم فإن تردد الذبذبة هو الخاصة الناتجة في الأصوات الموسيقية، والمعروفة بدرجة النغم، أو طبقة الصوت في السلم الموسيقي. وفي الحالة العامة لتابع اختياري لحد ما $\varphi(x)$ تتكون الذبذبات من تراكب النمط الأساسي (n=1) ونغمات توافقية مختلفة.



الشكل (2) الأنماط العادية للوتر المتذبذب

3-تحويلات فورييه والتوابع المتعامدة:

كما ذكرنا سابقاً، كان فورييه أول من أشار إلى أن التابع الدوري $f(t)$ له دور Tيمكن تحليله إلى مجموع حدود توافقية بسيطة كل منها له تردد زاوي من

مضاعفات التردد الزاوي الاساسي للتابع $f(t)$ أي $\omega=\frac{2\pi}{T}$ للتابع $f(t)$. يمكننا تلخيص نظرية فورييه بالعلاقة :

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} g_n \exp(inwt) \qquad (6.17)$$

حيث تدعى g_n ثوابت فورييه ويكون التردد الزاوي $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

وتعطى بالعلاقة:

$$g_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-inwt)dt \qquad (6.18)$$

يمكن اشتقاق نظرية فورييه من خواص التوابع الأسية $\varphi_n(t)=\frac{\exp(inwt)}{\sqrt{T}}$ والتي تشكل قاعدة متعامدة في منطقة فترة واحدة من $f(t)$ أي أن:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_m^*(t)\varphi_n(t)dt=\langle m|n\rangle=\delta_{mn} \qquad (6.19)$$

حيث t_0 هي نقطة بداية عشوائية، $\varphi_m^*(t)$ هو المرافق العقدي لـ $\varphi_m(t)$ و δ_{mn} هو تابع كرونيكر أي $\delta_{mn}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$ ونحصل عندها على ثوابت فورييه من المعادلة (6-18) .

يمكن أن نعمم نظرية فورييه إلى تابع غير دوري معرف في المنطقة $x\in[a,b]$ ونستطيع أن نكتب :

$$f(t)=\sum_n g_n\varphi_n(x) \qquad (6.20)$$

ويعطى الثابت في هذه الحالة بالعلاقة:

$$g_n=\int_a^b f(x)\varphi_n^*(x)dx=\langle n|f\rangle \qquad (6.21)$$

نحصل على انتقال فورييه المستمر بجعل سلسلة فورييه محدودة بالمنطقة $t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ وبتمديد الدور T إلى اللانهاية، ونعيد تحديد $n\omega\to\omega$ و $\sum_n\to\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}$. ويصبح المجموع تكاملاً.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\exp[i\omega t]dt \qquad (6.22)$$

وهو معروف بتكامل فورييه.

يعطى ثابت فورييه بالعلاقة :

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp[-i\omega t]dt \qquad (6.23)$$

تحدد العلاقتان (23)و(22) انتقال فورييه وعكسه.

ويعطى انتقال فورييه في ثلاثة أبعاد بالعلاقتين:

$$f(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{k})\exp[i\mathbf{kr}]d\mathbf{k} \qquad (6.24)$$

$$g(\mathbf{k})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r})\exp[-i\mathbf{kr}]d\mathbf{r} \qquad (6.25)$$

4-تحويل فورييه المنفصل

يعد انتقال فورييه لتابع محدد ضرورياً عند تحليل المعطيات التجريبية، ويكون من الصعب غالباً أن نلاحظ صورة فيزيائية واضحة من معطيات تجريبية أخذت من تجربة ما.

نتعامل حين تعمل في الفيزياء التجريبية أو غيرها، مع عدد كبير من النقاط، وتصبح سرعة تنفيذ الخوارزمية مهمة.

للحصول على تحويل فورييه للمعطيات المتقطعة نقوم أولاً بتحويل المتغيرات المستمرة إلى متقطعة.

لنفترض أننا حصلنا من تجربة على قيم التابع $f(t)$ الذي هو كمية فيزيائية متعلقة بالزمن ، فإذا كنا قد أجرينا القياسات ما بين $t=0$ و $t=T$ وبفترات زمنية متساوية $\tau=\frac{T}{(N+1)}$ ، حيث $f(t)$ لايساوي الصفر فقط عندما $t\in[0,T]$.

ويكون التردد ω الزاوي متقطعاً بمجال زمني $\upsilon=\frac{2\pi}{T}$. N العدد الكلي للنقاط.

يعبر عن انتقال فورييه المتقطع بالعلاقتين:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \exp[\frac{i2\pi nk}{N}] \qquad (6.26)$$

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp[\frac{-i2\pi nk}{N}] \qquad (6.27)$$

حيث عبرنا عن $f_n = f(t = n\tau)$ و $g_k = g(\omega = k\upsilon)$.

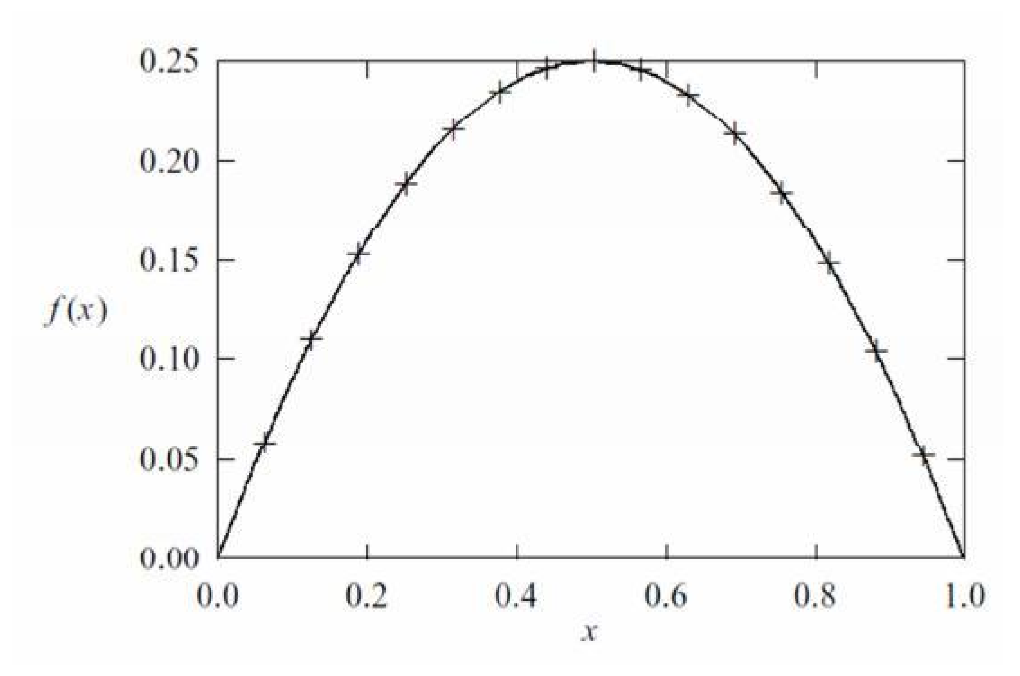
ونقوم بفصل الجزء التخيلي عن الجزء الحقيقي للثوابت في تحويل فورييه باستخدام العلاقتين:

$$\text{Re}(g_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\frac{2\pi nk}{N} \text{Re}(f_n) + \sin\frac{2\pi nk}{N} \text{Im}(f_n) \right] \qquad (6.28)$$

$$\text{Im}(g_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\frac{2\pi nk}{N} \text{Im}(f_n) - \sin\frac{2\pi nk}{N} \text{Re}(f_n) \right] \qquad (6.29)$$

يقدم البرنامج التالي تطبيق العلاقتين (28)و (29).

يقوم البرنامج بحساب تحويل فورييه المتقطع للتابع $f(x) = x(1-x)$ في المنطقة $x \in [0,1]$.كذلك يحسب قيمة تحويل فورييه العكسي . وتكون النتيجة كما بالشكل.



الشكل (3) يظهر الشكل التابع (خط) و القيم من تحويل فورييه العكسي (+)

```
      PARAMETER (N = 128,M=8)
      DIMENSION FR(N),FI(N),GR(N),GI(N)
      F0 = 1.0/SQRT(FLOAT(N))
      H  = 1.0/(N-1)
      DO      150  I = 1, N
        X      = H*(I-1)
        FR(I) = X*(1.0-X)
        FI(I) = 0.0
  150 CONTINUE
      CALL DFT (FR,FI,GR,GI,N)
      DO      200  I = 1, N
        GR(I) = F0*GR(I)
        GI(I) = F0*GI(I)
  200 CONTINUE
      DO      300  I = 1, N
        GI(I) = -GI(I)
  300 CONTINUE
      CALL DFT (GR,GI,FR,FI,N)
      DO      400  I = 1, N
        FR(I) =  F0*FR(I)
        FI(I) = -F0*FI(I)
  400 CONTINUE
      WRITE (6,999) (H*(I-1),FR(I),I=1,N,M)
      WRITE (6,999)  H*(N-1),FR(N)
      STOP
  999 FORMAT (2F16.8)
      END
      SUBROUTINE DFT (FR,FI,GR,GI,N)
      DIMENSION FR(N),FI(N),GR(N),GI(N)
      PI = 4.0*ATAN(1.0)
      X  = 2*PI/N
      DO      150  I = 1, N
        GR(I) = 0.0
        GI(I) = 0.0
        DO    100  J = 1, N
          Q      = X*(J-1)*(I-1)
          GR(I) = GR(I) + FR(J)*COS(Q) + FI(J)
          GI(I) = GI(I) + FI(J)*COS(Q) - FR(J)
  100   CONTINUE
  150 CONTINUE
      RETURN
      END
```

5-تحويل فوريه السريع Fast Fourier Transformation (FFT):

يستغرق الحاسب زمناً يتناسب مع N^2 عند حساب تحويل فوريه، وهو ما يجعل عملية الحساب ليست بالكفاءة المطلوبة. لحل هذه المشكلة اقترح الكثيرون فكرة تعرف الآن بتحويل فوريه السريع، وهي تقضي بترتيب الحدود في سلاسل وأخذ المجموع رتبياً . على سبيل المثال، نستطيع أن نكتب سلسلة من إضافة أزواج لإنجاز مجموع إذا كان عدد نقاط المعطيات من الأس 2. أي $N=2^M$ حيث M عدد صحيح.

ومن الجدير بالذكر أن فكرة تحويل فوريه السريع قد وجدت قبل عشرات الأعوام من ظهور الحاسب، حيث اقترحها غاوص Gauss، ونشرها في العام 1886 في مجلة neoclassical Latin. وقد وضعت فكرة غاوص في التنفيذ عام 1965 من قبل كولي و توكي Cooley & Tukey . تتركز أبسط خوارزمية لتحويل فوريه السريع على فصل الحدود الزوجية والفردية في تحويل فوريه :

$$g_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \exp[\frac{-i2\pi(2n)k}{N}] + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \exp[\frac{-i2\pi(2n+1)k}{N}] \quad (6.30)$$

$$= x_k + y_k \exp[\frac{-i2\pi k}{N}]$$

حيث

$$x_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \exp[\frac{-i2\pi nk}{(N/2)}] \quad (6.31)$$

$$y_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \exp[\frac{-i2\pi nk}{(N/2)}] \quad (6.32)$$

وقد تجاهلنا هنا الحد $\frac{1}{\sqrt{N}}$ والذي يمكن إضافته في البرنامج الحاسوبي.

وباستخدام تحويل فوريه السريع هذا ينخفض عدد العمليات إلى $N\log_2 N$ بدلاً من N^2.

البرنامج التالي يعطي خوارزمية تحويل فوريه السريع FFT بلغة الفورتران.

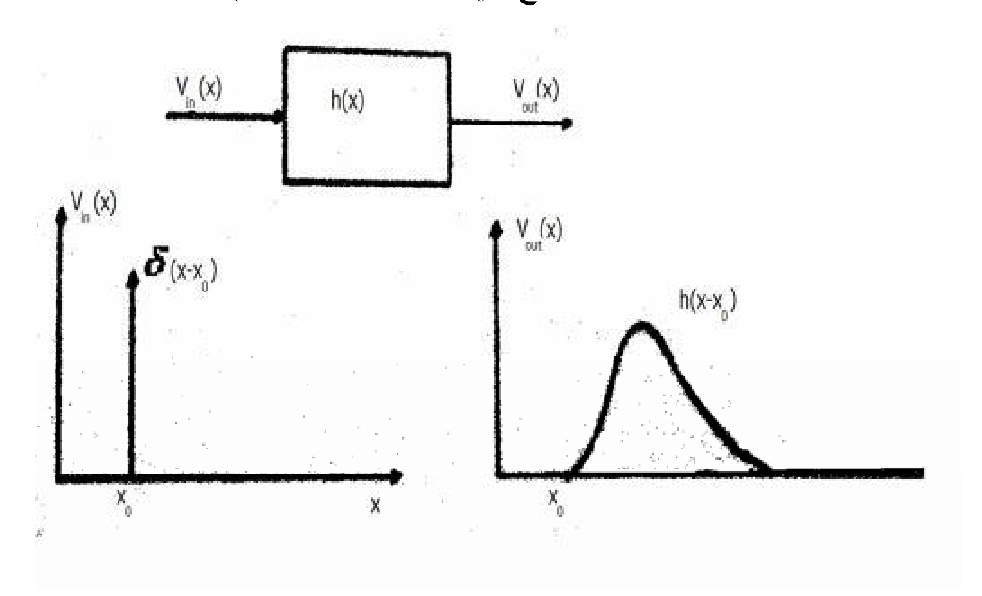
```
SUBROUTINE FFT(AR,AI,N,M)
```

```
      DIMENSION AR(N),AI(N)
      PI = 4.0*ATAN(1.0)
      N2 = N/2
      N1 = 2**M
      IF(N1.NE.N) STOP 'Indices do not match'
      L = 1
      DO      150  K = 1, N-1
        IF(K.LT.L) THEN
          A1     = AR(L)
          A2     = AI(L)
          AR(L) = AR(K)
          AR(K) = A1
          AI(L) = AI(K)
          AI(K) = A2
        ENDIF
        J   = N2
        DO      100  WHILE (J.LT.L)
          L = L - J
          J = J/2
100     END DO
        L = L + J
150   CONTINUE
      L2 = 1
      DO      200  L = 1, M
        Q  =  0.0
        L1 =  L2
        L2 =  2*L1
        DO    190  K = 1, L1
          U   =  COS(Q)
          V   = -SIN(Q)
          Q   =  Q + PI/L1
          DO  180  J = K, N, L2
            I     =  J + L1
            A1    =  AR(I)*U - AI(I)*V
            A2    =  AR(I)*V + AI(I)*U
            AR(I) =  AR(J) - A1
            AR(J) =  AR(J) + A1
            AI(I) =  AI(J) - A2
            AI(J) =  AI(J) + A2
180       CONTINUE
190     CONTINUE
200     CONTINUE
        RETURN
        END
```

6-الالتفاف convoluation:

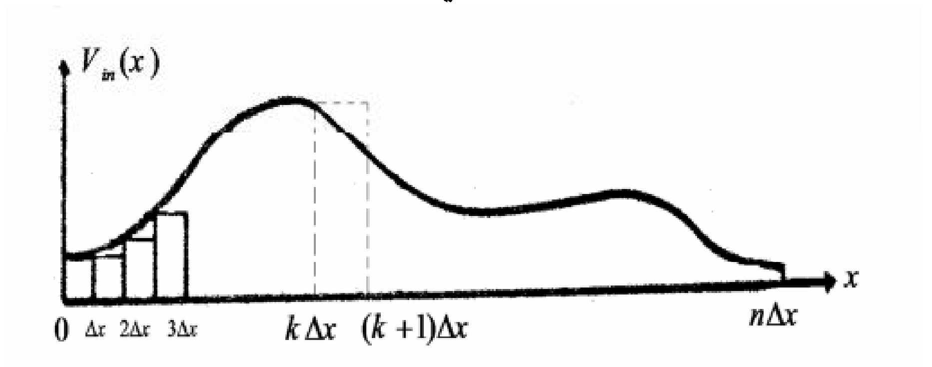
يعرف الالتفاف بأنه الأثر الذي يعطيه جهاز القياس عند دخول إشارة إليه. فخيال نقطة ضوئية يخرج على شكل بقعة ضوئية، كما تعرف قدرة الفصل لجهاز بأنها المسافة الأصغرية التي يمكن أن يعطي الجهاز الضوئي خيالاً مميزاً لهما. لنفرض أننا أدخلنا على مضخم إشارة لها مدة حياة قصيرة جداً بالنسبة للمضخم، فسيخرج الجهاز إشارة لها مدة حياة تتعلق بالاستجابة النبضية للجهاز. أي أن الجهاز قد حول الاشارة المدخلة إلى إشارة أخرى (شوهها) ومن ثم إذا علمنا الاستجابة النبضية للجهاز $h(x)$ وإشارة الدخل $V_{in}(x)$ فسيكون بإمكاننا حساب إشارة الخرج $V_{out}(x)$ وهذا هو ما يدعى الالتفاف.

إذا أدخلنا على الجهاز نبضة ضيقة تمثل بتابع ديراك $\delta(x)$ فعندها سنحصل على استجابة الجهاز $h(x)$ والتي ستكون أكثر عرضاً، والاستجابة النبضية للجهاز المدخل عليه إشارة ممثلة بالتابع $\delta(x-x_0)$ ستكون $h(x-x_0)$.



الشكل (4) يظهر الشكل الاستجابة النبضية $h(x-x_0)$ للجهاز المدخل عليه إشارة ممثلة بالتابع $\delta(x-x_0)$.

لنفترض أننا أدخلنا للجهاز نبضة $V_{in}(x)$ بالطبع يمكننا تقسيمها إلى سلسلة من النبضات $V_{in}(0), V_{in}(\Delta x), V_{in}(2\Delta x), V_{in}(3\Delta x), \ldots\ldots\ldots, V_{in}(k\Delta x)$ عرض كل منها Δx وسعتها تساوي سعة الإشارة في النقطة المعتبرة .



الشكل (5) يظهر الشكل النبضة $V_{in}(x)$ مقسمة إلى سلسلة من النبضات $V_{in}(0), V_{in}(\Delta x), V_{in}(2\Delta x), V_{in}(3\Delta x), \ldots\ldots\ldots, V_{in}(k\Delta x)$ عرض كل منها Δx

إذا كانت استجابة الجهاز لنبضة عرضها $\frac{1}{\Delta x}$ وارتفاعها $V_{in}(\Delta x)$ تساوي $h_1(x)$ عندها تكون استجابة الجهاز لنبضة عرضها Δx وارتفاعها واحدة الأطوال تساوي إلى $h_1(x)\,\Delta x$. وهكذا نستنتج أن إشارة الخرج للنبضة $V_{in}(0)$ التي دخلت الجهاز في النقطة $(x=0)$ هي :

$$V_{out}(x=0) = V_0 = V_{in}(0)\; h(x)\Delta x \tag{6.33}$$

والإشارة التي دخلت الجهاز عند النقطة (Δx) ينتج عنها إشارة خرج هي:

$$V_{out}(\Delta x) = V_{\Delta x} = V_{in}(\Delta x)\; h(x-\Delta x)\Delta x \tag{6.34}$$

ونكتب العلاقات التالية:

$$V_0 = V_{in}(0)\; h(x)\Delta x \tag{6.35}$$

$$V_{\Delta x} = V_{in}(\Delta x)\; h(x-\Delta x)\Delta x$$

$$V_{2\Delta x} = V_{in}(2\Delta x)\; h(x-2\Delta x)\Delta x$$

....

$$V_{k\Delta x} = V_{in}(k\Delta x)\; h(x-k\Delta x)\Delta x$$

وتكون إشارة الخرج هي مجموع هذه الإشارات:

$$V_{out}(x)=\sum_{k=0}^{n} V_{in}(k\Delta x)\; h(x-k\Delta x)\Delta x \qquad (6.36)$$

حيث n عدد صحيح يمثل الجزء الصحيح من ناتج قسمة $(\frac{x}{\Delta x})$.

إذا جعلنا $(\Delta x \to 0)$ فإن السلسلة $V_{in}(k\Delta x)$ تنتهي نحو التابع $V_{in}(x)$ ويتناهى $h_1(x)$ إلى الاستجابة النبضية $h(x)$ للجهاز ويصبح المجموع تكاملاً:

$$V_{out}(x)=\int_{0}^{x} V_{in}(x')\; h(x-x')\; dx' \qquad (6.37)$$

ومن مبدأ السببية الذي ينص على أن النتيجة تكون مستغرقة منطقياً في المقدمات، وبحيث نتمكن منطقياً من خلال معرفتنا بالنتيجة أن ندرك طبيعة المقدمات التي نتجت عنها، أي أن الحدث لايمكن أن يوجد من دون سبب يؤدي لحدوثه ويزول السبب بزوال المسبب أي أنه لايمكن أن يوجد $h_1(x)$ من أجل قيم سالبة لـ x .

وبالتالي نستطيع كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$V_{out}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(x')\; h(x-x')\; dx' \qquad (6.38)$$

وهذه تدعى معادلة الالتفاف وتكتب رمزياً بالطريقة الآتية:

$$V_{out}(x)=V_{in}(x)\otimes h(x)\; dx \qquad (6.39)$$

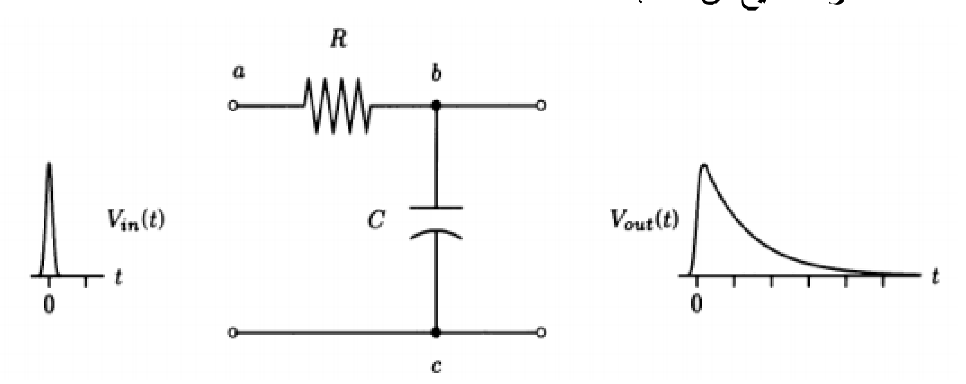
ومن أجل تابع دوره T يعرف الالتفاف بالعلاقة:

$$V_{out}(x)=V_{in}(x)\otimes h(x)\; dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(x')\; h(x-x')\; dx' \qquad (6.39)$$

مثال: ليكن لدينا دارة طنين، كما في الشكل التالي، ندخل من اليسار إشارة تعبر عن مقدار فيزيائي ما، والاشارة التي نشاهدها حقيقة هي الاشارة الموجودة على

اليمين، قبل وصول الاشارة يكون مخرج الكاشف يساوي الصفر، وعند وصول الإشارة سيذهب بعض من طاقتها لشحن المكثف، ومن ثم فإن إشارة الخرج لن تكون مماثلة للاشارة المدخلة تماماً. وبعد مرور الاشارة ستفرغ الدارة طاقتها المخزنة وسيستمر الكمون بعد مرور الاشارة.

نطبق علاقة كيرشوف على الدارة المبينة في الشكل لنرى العلاقة بين إشارة الدخل والخرج، بفرض أن التيار يجري باتجاه عقارب الساعة، تكون شدة التيار الذي يمر بالنقطة b هو فرق الكمون بين طرفي المقاومة مقسوماً على قيمة المقاومة $\frac{V_a - V_b}{R}$. وتكون شدة التيار الذي يخرج من النقطة b هي الشدة التي تمرّ من المكثف. ونستطيع أن نكتب:



الشكل (6) يظهر الشكل دارة طنين و إشارة الدخل والخرج

$$I = C\frac{d(V_b - V_C)}{dt} \tag{6.40}$$

ومن استمرار التيار نكتب:

$$\frac{V_a - V_b}{R} = C\frac{d(V_b - V_C)}{dt} \tag{6.41}$$

وبفرض أن $V_C = 0$ ، يكون V_a هو كمون الادخال V_{in} و V_bكمون الاخراج V_{out} ،وتصبح المعادلة بالشكل:

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{R} = C\frac{dV_{out}}{dt} \quad (6.42)$$

أو

$$\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{V_{out}}{RC} = \frac{V_{in}}{RC} \quad (6.43)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ولها الحل التحليلي:

$$V_{out}(t) = \exp(\frac{-t}{RC})\left[\int_{-\infty}^{t} \exp(\frac{t}{RC})V_{in}(\tau)\, d\tau + c_1\right] \quad (6.44)$$

حيث ثابت التكامل c_1 ، لنفرض أن الاشارة المدخلة هي $V_{in}(t) = \delta(t)$ فبتنفيذ التكامل نحصل على :

$$V_{out}(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ \frac{1}{RC}\exp(\frac{-t}{RC}) & ,t \geq 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

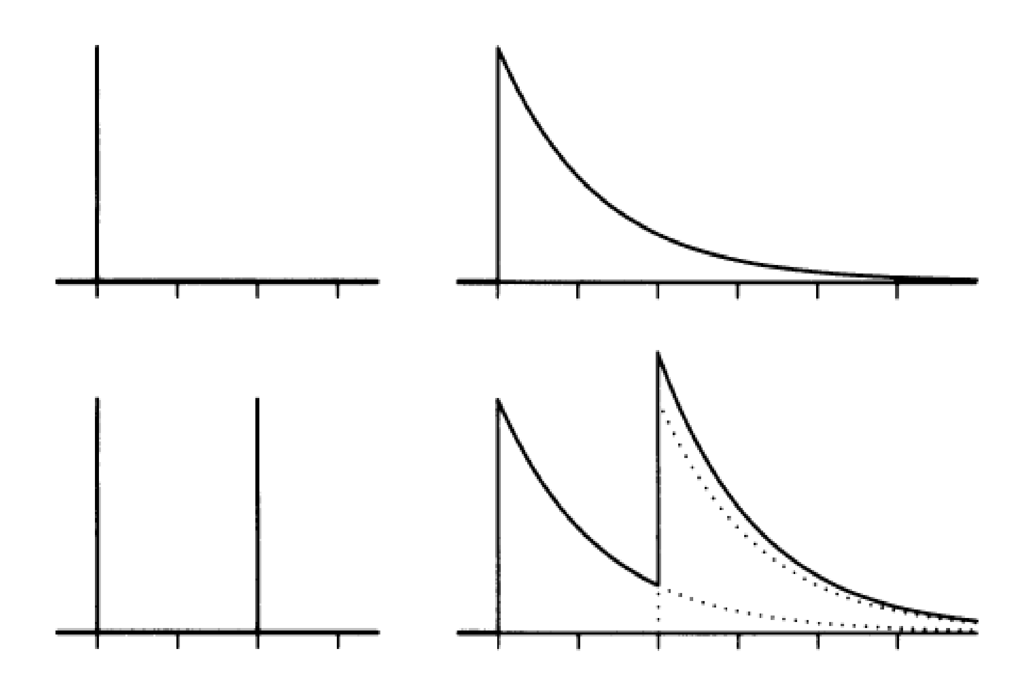
ولكن ما علاقة كل هذا بالالتفاف؟ لنتصور أن هناك نقطة بداية للنبضات، وأن هذه النبضات تصل تباعاً، لذا فإن الخروج سيكون تركيباً من الاستجابات المفردة للنبضات،وبما أن الجملة خطية ،

سيكون التركيب هو مجموع من الاستجابات لنبضات وصلت سابقاً ، كما في الشكل(7).

وبالطبع كلما كثرت النبضات القادمة بزمن أصغر كلما اقتربنا من حالة الاستمرار .

وكما نعلم فإننا نستطيع كتابة التابع المستمر بدلالة تابع دلتا ديراك على الشكل الآتي:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau \quad (6.45)$$



الشكل (7) يظهر الشكل استجابة دارة الطنين لتابع دلتا ديراك.

فإذا فرضنا أن استجابة الجملة $r(t)$ عندئذ يكتب الخرج بالشكل:

(6.46)

$$V_{in}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

ويحقق كمون الاخراج العلاقة:

(6.47)

$$\begin{aligned} V_{out}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(\tau)\, r(t-\tau)\,d\tau \\ &= V_{in} \otimes r \end{aligned}$$

أي أن إخراج الجملة هو الالتفاف.

برنامج لحساب الالتفاف

```
      INTEGER N,N2,M
         REAL PI
         PARAMETER(N=16,N2=32,M=9,PI=3.14159265)
         INTEGER i,isign,j
         REAL cmp,data(N),respns(M),resp(N),ans(N2)
         do 11 i=1,N
         data(i)=0.0
         if ((i.ge.(N/2-N/8)).and.(i.le.(N/2+N/8))) data(i)=1.0
11    continue
         do 12 i=1,M
         respns(i)=0.0
         if (i.gt.2 .and. i.lt.7) respns(i)=1.0
         resp(i)=respns(i)
12    continue
        isign=1
        call convlv(data,N,resp,M,isign,ans)
C      compare with a direct convolution
       write(*,'(/1x,t4,a,t13,a,t24,a)') 'I','CONVLV','Expected'
      do 14 i=1,N
      cmp=0.0
       do 13 j=1,M/2
         cmp=cmp+data(mod(i-j-1+N,N)+1)*respns(j+1)
         cmp=cmp+data(mod(i+j-1,N)+1)*respns(M-j+1)
13    continue
       cmp=cmp+data(i)*respns(1)
       write(*,'(1x,i3,3x,2f12.6)') i,ans(i),cmp
```



```
      do 14 i=1,N
      cmp=0.0
       do 13 j=1,M/2
         cmp=cmp+data(mod(i-j-1+N,N)+1)*respns(j+1)
         cmp=cmp+data(mod(i+j-1,N)+1)*respns(M-j+1)
13    continue
       cmp=cmp+data(i)*respns(1)
       write(*,'(1x,i3,3x,2f12.6)') i,ans(i),cmp
```



```
14    continue
      END
```

```
      SUBROUTINE convlv(data,n,respns,m,isign,ans)
      INTEGER isign,m,n,NMAX
      REAL data(n),respns(n)
      COMPLEX ans(n)
      PARAMETER (NMAX=4096)
c c    USES realft,twofft
      INTEGER i,no2
      COMPLEX fft(NMAX)
      do 11 i=1,(m-1)/2
        respns(n+1-i)=respns(m+1-i(
11    continue
         do 12 i=(m+3)/2,n-(m-1)/2
          respns(i)=0.0
12    continue
        call twofft(data,respns,fft,ans,n)
        no2=n/2
        do 13 i=1,no2+1
        if (isign.eq.1) then
          ans(i)=fft(i)*ans(i)/no2
        else if (isign.eq.-1) then
          if (abs(ans(i)).eq.0.0) pause
     *'deconvolving at response zero in convlv'
          ans(i)=fft(i)/ans(i)/no2
        else
          pause 'no meaning for isign in convlv'
        endif
13    continue
        ans(1)=cmplx(real(ans(1)),real(ans(no2+1)))
        call realft(ans,n,-1)
        return
        END
```

7-**نظرية بلانشريل**:

تنص نظرية بلانشريل على أن تحويل فورييه لالتفاف تابعين يساوي جداء تحويل فورييه لكل منهما، وعكس النظرية صحيح أي أن:

$$F[g_1(x)\otimes g_2(x)] = F[g_1(x)].F[g_2(x)] \qquad (6.48)$$

$$F^{-1}[F[g_1(x)].F[g_2(x)]] = g_1(x)\otimes g_2(x)$$

8-الطرائق الطيفية:

تكمن الفكرة الأساسية في الطرائق الطيفية بنقل المسألة قيد الدراسة من وصفها الأساسي إلى أخرى تتضمن انتقال فورييه للحل. نحصل على الحل بإجراء تحويل فورييه العكسي للحل الذي نجده بانتقال الفضاء.

لنفترض، على سبيل المثال، معادلة الانتشار

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{6.49}$$

التي تصف انتشار الحرارة $T(x,t)$ على طول قضيب من المعدن، نبدأ من اللحظة $t=0$ حيث نعلم أن توزيع الحرارة الأساسي $T(x,0)$، المسألة هي إيجاد درجة الحرارة على طول القضيب بأزمان تالية. إذا كان $\tau(k,t)$ انتقال فورييه لـ $T(x,t)$ عندها

$$\tau(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t) \exp(-ikx)\, dx \tag{6.50}$$

ونكتب درجة الحرارة بالصيغة:

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k,t) \exp(ikx)\, dk \tag{6.51}$$

لاحظ أننا ننتقل ما بين x,k باللحظة ذاتها. والآن باستبدال هذه العبارة للحرارة في معادلة الانتشار نجد:

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k,t) \exp(ikx)\, dk = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k,t) \exp(ikx)\, dk \tag{6.52}$$

على الجانب الأيسر مؤثرات المشتقات الجزئية $\tau(k,t)$ولكن ليست تابعاً لـ x، لذا فإنه على الجانب الأيمن مؤثرات المشتق لا تؤثر إلا على الحد الأسي ونحصل على:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tau(k,t)}{\partial t} \exp(ikx)\, dk = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k,t)(-k^2) \exp(ikx)\, dk \tag{6.53}$$

نضرب كلا الحدين بـ $\exp(ikx)$ ونكامل على x فنجد:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ik'x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\tau(k,t)}{\partial t}\exp(ikx)\,dkdx= \tag{6.54}$$

$$\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ik'x)\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(k,t)(-k^2)\exp(ikx)\,dkdx$$

نبدل ترتيب الحدود في التكامل ونستخدم العلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-i(k-k')x]dx=2\pi\delta(k-k') \tag{6.55}$$

من اجل دلتا ديراك $\delta(k-k')$ نجد:

$$\frac{\partial\tau(k,t)}{\partial t}=-k^2\mu\;\tau(k,t) \tag{6.56}$$

يوجد في العبارة الأساسية للمسألة مشتقان جزئيان ونجد في فراغ الانتقال بأن لدينا معادلة مشتق واحد فقط حله سهل :

$$\tau(k,t)=\exp(-k^2\mu t)\;\tau(k,0) \tag{6.57}$$

يمكن الحصول على $\tau(k,0)$بتوزيع انتقال الحرارة :

$$\tau(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,0)\exp(-ikx)\,dx \tag{6.58}$$

وبتحديد $\tau(k,t)$ نستطيع استخدام العلاقة لانجاز التحويل العكسي ونجد الحرارة:

$$T(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tau(k,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(k,t)\exp(ikx)\,dk \tag{6.59}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-k^2\mu t)\;\tau(k,0)\exp(ikx)\,dx$$

أي تتألف هذ الطريقة من ثلاث خطوات رئيسة

1− انتقال فوربيه للمعادلة التفاضلية الجزئية

2- حل المعادلة في الفراغ الانتقالي

3- ايجاد انتقال فورييه العكسي

تطبيق (2): النواس الشواشي

ظهرت كلمة "شواش" Chaos لأول مرة في العام (700 ق.م) في كتابات الشاعر الإغريقي هسيود في قوله: "في البدء كان الشواش، لا شيء سوى الخلاء والهيولى والفراغ غير المحدود" . عرّفت القواميس "الشواش" بأنه الاضطراب أو الاهتياج وقد ذكر المؤرخ الأمريكي هنري أدامز (1918- 1858 م) المعنى العلمي للشواش قوله: "الشواش غالبًا ما يولِّد الحياة، بينما النظام يولِّد العادة" .

في أحد أيام 1961 م كان العالم لورنتز يعمل على مشكلة التنبؤ بالطقس، بواسطة حاسوبه المزود بنموذج لمحاكاة تحولات الطقس، مؤلف من مجموعة مِنْ اثنتي عشرة معادلة لتشكيل الطقس، أراد إعادة سلسلة معينة من الحسابات مرة ثانية. ولاحظ لورنتز أن السلسلة قد تطورتَ بشكل مختلف. بدلاً من تكرار النمط السابق نفسه، فقد حدث تباعد في النمطِ، يَنتهي بانحراف كبير عن المخطط الأصلي للسلسلة الأصلية. وفي النهاية استطاع لورنتز تفسير الأمور، فقد قام الحاسوب بتخزين الأعداد بستة منازل عشرية في الذاكرة، و هذا أدى إلى اختلاف طفيف جدا عن الرقم الأصلي الموجود في الحسابات. وعلى الرغم أن هذا الخلاف ضئيل فقد تطور مع تسلسل الحسابات إلى فروق ضخمة تجلت بانحرافات المخططات الواضحة. كانت الأفكار التقليدية وقتها تَعدُّ مثل هذا التقريب إلى ثلاثة مراتب عشرية دقيقا جداً، وسمى لورنتزهذا التأثير ليعرف بتأثيرِ الفراشة. فكمية الاختلاف الضئيلة في نقاط بداية المنحنيين كانت صغيرة جدا لدرجة تشبيهها بأن خفقان جناح فراشة في نيويورك يؤدي لإعصار في البرازيل.

من الأمثلة على الجمل اللاخطية هو مايدعى بالنواس الشوشي :

لنفترض أن لدينا نواساً يتألف من سلك مهمل الوزن طوله ℓ، وكتلة نقطية m معلقة في نهاية السلك. وأن النواس مقيد في مستوى عمودي ويتم التأثير عليه بقوة تحريك خارجية(دورية) F_d تمكن النواس من المرور فوق نقطة التعليق ، F_r قوة مقاومة . توصف حركة هذا النواس بالاتجاه المماسي للحركة الدائرية للكتلة النقطية باستخدام معادلة نيوتن :

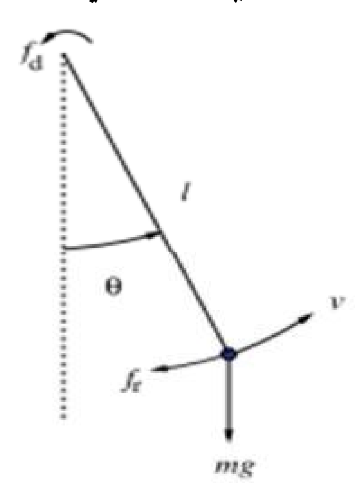
$$ma = F_g + F_d + F_r \qquad (6.60)$$

حيث $F_g = -mgSin(\theta)$ قوة الثقالة ، g تسارع الجاذبية الأرضية، θ الزاوية التي يصنعها النواس مع الشاقول و $a = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$ التسارع بالاتجاه المماسي.

لنفترض أن القوة الموجهة ذات علاقة دورية مع الزمن:

$$F_d(t) = F_d^0 Cos(\omega_0 t) \qquad (6.61)$$

حيث F_d^0 السعة و التردد الزاوي لقوة التحريك الخارجية.



الشكل(8): القوى التي تؤثر في النواس الشواشي

F_r مقاومة الهواء، ونفترض أنها تعطى بقانون ستوكس، الذي ينص على أن مقاومة الهواء تكون معاكسه للحركة ومتناسبة خطيا مع السرعة ، $F_r = -Kv$ حيث v السرعة الخطية و K ثابت التناسب ، تعطى السرعة الخطية بالعلاقة $v = \ell\frac{d\theta}{dt}$.

يعد هذا الوصف مقبولاً للتعبير عن حركة جسيم يتحرك في وسط كثيف.

إذا أعدنا كتابة المعادلة (6.60) بلا أبعاد وذلك بافتراض أن $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ هي وحدة الزمن، ينتج لدينا:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q\frac{d\theta}{dt} + Sin(\theta) = bCos(\omega_0 t) \quad (6.62)$$

حيث $q = \frac{K}{m}$ و $b = \frac{F_d^0}{m\ell}$.

يمكننا كتابة المشتقات بوصفها متغيرات ومن ثم تتحول المعادلة من معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية إلى جملة من معادلتين تفاضليتين من الدرجة الأولى .

إذا اخترنا $y_1 = \theta$ و $y_2 = \omega = \frac{d\theta}{dt}$

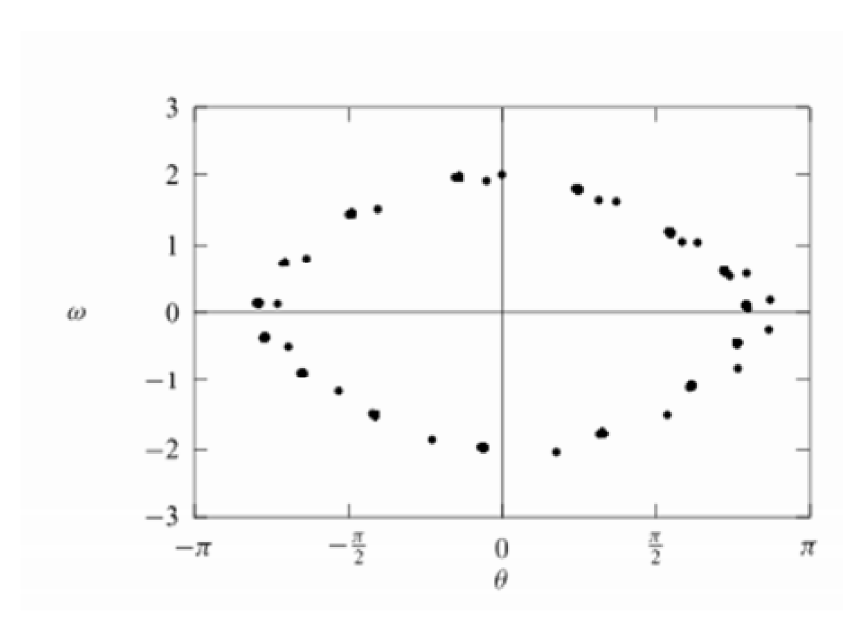
فتصبح المعادلة بالشكل:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

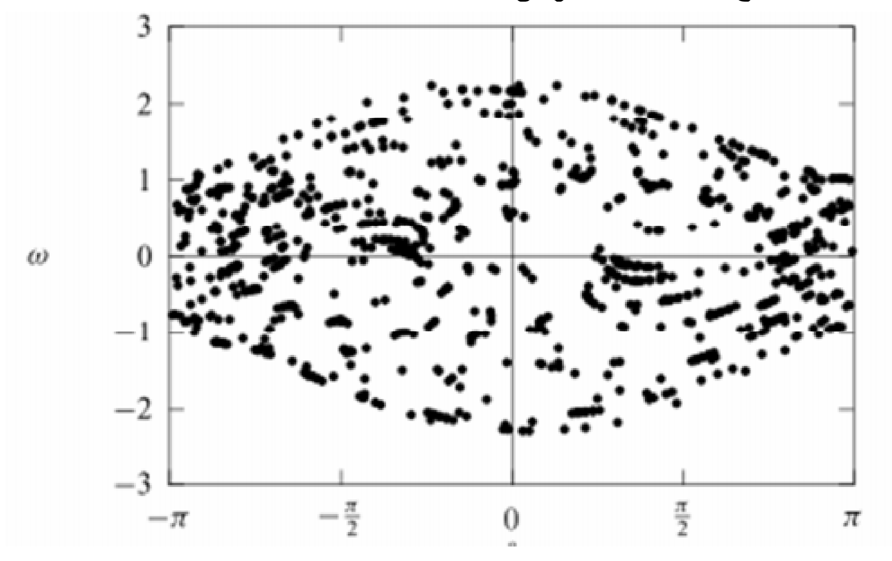
$$\frac{dy_2}{dt} = -qy_2 - Sin(y_1) + bCos(\omega_0 t) \quad (6.63)$$

وهاتان جملتان من معادلتين تفاضليتين يمكن إيجاد حلهما باستخدام طريقة رونغ كوتا من الدرجة الرابعة كما رأينا سابقاً.

إن هذه الجملة **بغياب** القوة التحريكية (الدورية) هي جملة خطية تميز بأن معرفة حالتها النهائية لاتتنبأ بشيئ عن ماضيها (إن وصول النواس لحالة السكون لا يسمح لنا باستنتاج الطريقة التي وصل بها إلى هذه الحالة)، إن جملة النواس الشواشي هي جملة لاخطية، ولها نقطة توازن غير مستقرة. فعندما يوجد النواس في الأعلى قد يصل إلى هذه النقطة بسرعة قريبة من الصفر، وهنا تظهر حساسيته للشروط الابتدائية، فهو إما أن يعود إلى الخلف، أو يكون لديه مايكفي من الطاقة للمرور فوق محور التعليق. وفي مثل هذه الحالات نستطيع معرفة الماضي لأن مروره فوق محور التعليق أو عدم مروره يتعلق بحالته السابقة والتغيرات الصغيرة في الماضي ستؤدي لتغيرات ملحوظة في المستقبل البعيد لتوسان الجملة، يظهر الحل في الشكلين:



الشكل(9): رسمت قيم السرعة الزاوية ω بالنسبة للزاوية θ، استخدمت قيم الوسائط كما يلي $\omega_0 = \frac{2}{3}$، $q = 0.5$ و $b = 0.9$. وتبدو الجملة دورية(تم استخدام 1000 نقطة من 10000 خطوة زمنية



الشكل(10): رسمت قيم السرعة الزاوية ω بالنسبة للزاوية θ ، استخدمت قيم الوسائط كما يلي $\omega_0 = \frac{2}{3}$، $q = 0.5$ و $b = 1.15$. حيث تبدو الجملة شواشية (تم استخدام 1000 نقطة من 10000 خطوة زمنية

تظهر الحلول تبعاً للقيم التي تأخذها ω_0 ، q و b. فحركة النواس تبدو دورية من أجل قيم الوسائط كما يلي $\omega_0 = \frac{2}{3}$ ، $q = 0.5$ و $b = 0.9$. بينما تظهر الحركة شواشية من أجل قيم الوسائط كما يلي $\omega_0 = \frac{2}{3}$ ، $q = 0.5$ و $b = 1.15$.

تتطلب الدراسة الحركية لجملة لاخطية أن ندرس طيف الاستطاعة.

يحدد طيف الاستطاعة بأنه مربع معاملات ثوابت فورييه للمتغير المتعلق بالزمن:

$$S(\omega) = \left| g(\omega) \right|^2$$

$g(\omega)$ تحويل فورييه للمتغير الحركي $x(t)$.

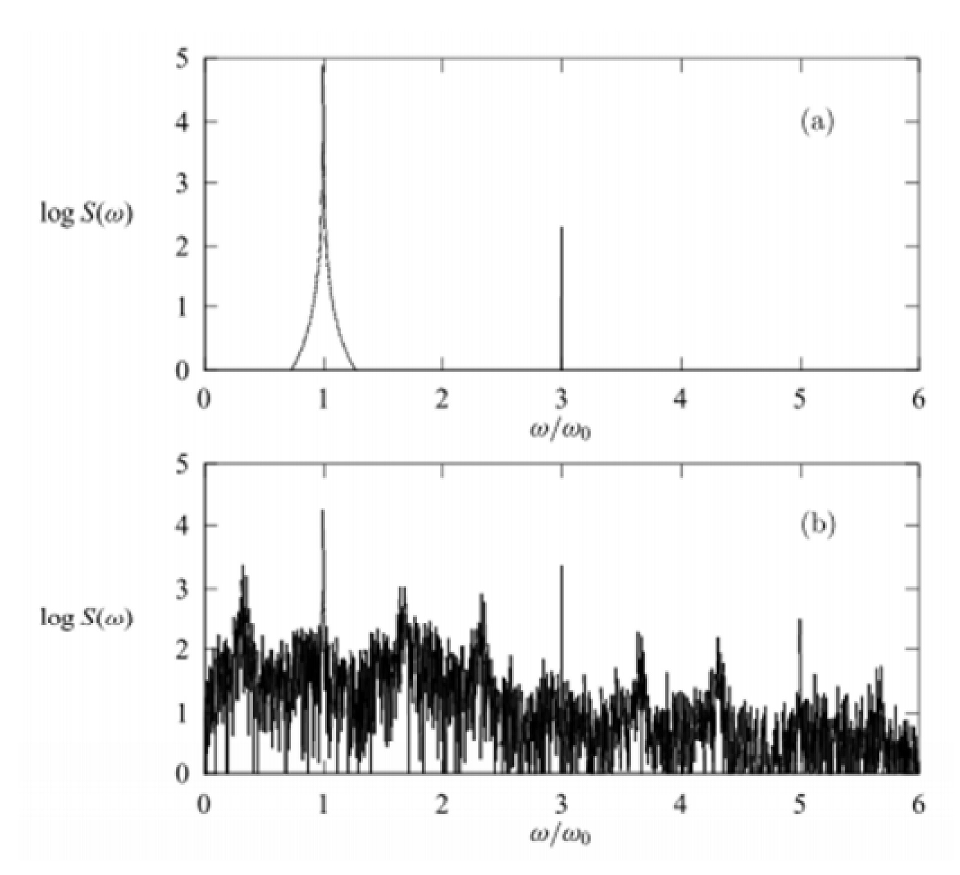
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) c^{-i\omega t} \, dt$$

يمكن الحصول على طيف الاستطاعة للزاوية التابعة للزمن والسرعة الزاوية التابعة للزمن ، وذلك بإجراء تحويل فورييه المتقطع(المنفصل) باستخدام خوارزمية انتقال فورييه السريع FFT.

يظهر الشكل(11) النتائج العددية لـ $\theta(t)$ في المنطقة الدورية والمنطقة الشوشية.

حيث تم استخدام الشروط الابتدائية $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 2$.

نلاحظ أن طيف الاستطاعة للنواس في الحالة الشوشية شاذ تماماً، ولكنه مع ذلك يحتوي على القمتين اللتين تظهران في الحالة الدورية، وهذا يعود إلى أن مساهمة القوة التحريكية(الدورية) لاتزال مرتفعة عند هذا التردد وعلى الرغم من ذلك فالجملة شواشية.



الشكل(11): طيف الاستطاعة بالنسبة للزاوية التابعة للزمن للنواس الدوري مع تخامد حيث $q = 0.5$ $\omega_0 = \frac{2}{3}$ ، (a) سلوك دوريb=0.9، (b) سلوك شواشي b=1.15.

تمارين:

1- أوجد قيم ثوابت سلسلة فوريه للتابع $f(t) = |t|$.

2- اكتب برنامجاً لحساب انتقال فوريه للتابع:

$$f(t) = \begin{cases} a(1 - a|t|), & |t| < \frac{1}{a} \\ 0, & |t| > \frac{1}{a}, \end{cases}$$

حيث $a = 10$ لقيم ω السالبة والموجبة.

3- أوجد استجابة الإخراج، لدارة رنين RC تدخل إليها إشارة $V_{in}(t) = \cos \gamma t$ مستخدما العلاقة (6-44) ، قارن نتيجتك مع النتيجة التي يمكنك الحصول عليها بحساب الالتفاف من العلاقة (6-47).

4- باستخدام الاستجابة $r(t)$ و $V_{out}(t)$ من التمرين السابق وباستخدام نظرية الالتفاف حدد $V_{in}(t)$.

5- أوجد درجة الحرارة على طول قضيب معدني طوله متر واحد ، تعطى الشروط الحدية بالعلاقة:

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > 1\,\text{m}, \\ 100°\text{C}, & |x| \le 1\,\text{m}, \end{cases}$$

حيث $\mu = 10^3\, m^2 / \text{scc}$

المراجع

1- د.مصطفى صايم الدهر، الفيزياء الحاسوبية، جامعة دمشق،2008.

2- د.محمود عثمان، التحليل العددي، جامعة تشرين،2007.

3- د.سليمان محمود، التحليل العددي /1/، جامعة تشرين،2009.

4- د.سليمان محمود، التحليل العددي /2/، جامعة تشرين،2008.

5- د.هاشم عبد اللي، التحليل العددي /2/،جامعة حلب،1996.

6- د.عفيف برهوم – د.ضيف الله نصور، الاهتزازات والأمواج/2/ ،جامعة تشرين،1992.

7- د.عدنان زين الدين، الاهتزازات والأمواج ،جامعة تشرين،2009.

8- د.كمال قمر، د.سالم مرزوق، الحاسبات والبرمجة،جامعة دمشق،1996.

9-SEDAT BIRINGEN AND CHUEN-YEN CHOW ,AN INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL FLUID MECHANICS, JOHN WILEY & SONS, INC,2011.

10-PAUL L. DE VRIES, A FIRST COURSE IN COMPUTATIONAL PHYSICS, JOHN WILEY & SONS, INC,1994.

11-TAO PANG, AN INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL PHYSICS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,2006.

12-J. M. THIJSSEN, COMPUTATIONAL PHYSICS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,1999.

13-STEVEN KOONIN, COMPUTATIONAL PHYSICS, WESTVIEW PRESS,1990.

14-Numerical recipes, FORTRAN edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS,1992.

15-Christian Grossmann Hans-Gorg Roos,Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,2007.